תרגול 5

תרגיל. מצא את העע של מטריצה משולשית העליונה

פתרון. תהי מטריצה משולשית עליונה

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & & \vdots \\ \vdots & 0 & a_{22} & & \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נמצא את הפולינום האופייני.

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \left|\begin{pmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \dots & & -a_{1n} \\ 0 & \lambda-a_{22} & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \lambda-a_{22} & & \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & \lambda-a_{nn} \end{pmatrix}\right| \\ &= \prod_{i=1}^{n}(\lambda-a_{ii}) \end{aligned}$$

לכן הע"ע הם a_{ii}

הגדרה. הגדרות:

1. כמו שציינו $p_A(\lambda)=|\lambda I-A|$ הוא הפולינום האופייני של A
2. הריבוי האלגברי של הע"ע λ_i הוא החזקה של הרכיב ה-$\lambda-\lambda_i$ בפולינום האופייני.
3. במרחב העצמי של A המתאים לעע λ הוא $V_\lambda=\{v|Av=\lambda v\}=N(\lambda I-A)$
4. הריבוי הגאומטרי של הע"ע λ_iהוא המימד של המרחב העצמי של λ_i.

משפט. הריבוי האלגברי תמיד גדול שווה מהריבוי הגאומטרי.

תרגיל. מצא את הע"ע והריבויים שלהם למטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

פתרון. ראשית נמצא את הפולינום האופייני.

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \lambda-2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-2)\left[(\lambda-2)^2-1\right] + (-\lambda+2-1) - 1(1+\lambda-2) \\
&= (\lambda-2)\left[\lambda^2-4\lambda+3\right] - 2\lambda+2 \\
&= (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-3) - 2(\lambda-1) \\
&= (\lambda-1)\left[(\lambda-2)(\lambda-3)-2\right] \\
&= (\lambda-1)^2(\lambda-4)
\end{aligned}$$

ישנם שני ע"ע $\lambda=1$ בעל ריבוי אלגברי 2 ו-$\lambda=4$ בעל ריבוי אלגברי 1.
כעת נחשב את הריבויים הגאומטרים.

- $\lambda=1$:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \{v|Av=v\} \\
&= \{v|(A-I)v=0\} \\
&= N(A-I) \\
&= N\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right) \\
&= Span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

והמימד של המרחב העצמי הוא 2. לכן הריבוי הגאומטרי של $\lambda=1$ הוא 2.

- $\lambda = 4$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v|Av=4v\} \\ &= \{v|(A-4I)v=0\} \\ &= N(A-4I) \\ &= N\left(\left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{array}\right)\right) \\ & N\left(\left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right)\right) \\ &= Span\left\{\left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right)\right\} \end{aligned}$$

והמימד של המרחב העצמי הוא 1. לכן הריבוי הגאומטרי של $\lambda = 4$ הוא 1.

משפט. קיילי המילטון. $p_A(A) = 0$ כלומר אם נציב את A בפולינום האופייני נקבל את מטריצת האפס.

דוגמה. אם נציב את $\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right)$ בפולינום $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ נקבל 0.

$$p_A\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right)\right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right)^2 + 1\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

כלומר מתקיים $A^2 + I = 0$ לכן $A(-A) = I$ ולכן ההופכית של Aהיא $-A$