# מד"ר - תרגול 2

2 באוגוסט 2011

## מידע על תרגילים

תיפתח קבוצה לקורס בHighlearn לשם יעלו תרגילים.
יהיו 4 תרגילים, הגשה כל שבוע.

## מד"ר הנפתרות ע"י משוואות הומוגניות

נתייחס למקרה ספציפי שבו מתקיים:

$$y^{'}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$$

כאשר $f\left(t\right)$ היא פונק' רציפה של משתנה אחד.
נהוג במקרה זה להשתמש בהחלפת משתנים בשלבים הבאים:

### מקרה א'

אם $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a & b\end{vmatrix}\neq0$ נשתמש בהחלפת משתנים:

$$\begin{cases}y= & \eta+\beta\\ x= & \xi+\alpha\end{cases}$$

ואז מתקיים:

$$\begin{aligned}a_1x+b_1y+c_1 & = a_1\left(\xi+\alpha\right)+b_1\left(\eta+\beta\right)+c_1\\ & = a_1\xi+b_1\eta+\left(a_1\alpha+b_1\beta+c_1\right)\end{aligned}$$

באופן דומה עבור המכנה:

$$ax+by+c=a\xi+b\eta+\left(a\alpha+b\beta+c\right)$$

נבחר את המספרים $\alpha,\,\beta$ כך שמתקיים:

$$\begin{cases}a_1\alpha+b_1\beta+c_1 & = 0\\ a\alpha+b\beta+c & = 0\end{cases}$$

(המס' הנ"ל קיימים כיוון שהדטרמיננטה שונה מ0).
מכאן נקבל:

$$\begin{aligned}a_1x+b_1y+c_1 & = a_1\xi+b_1\eta\\ ax+by+c & = a\xi+b\eta\end{aligned}$$

מתקיים $\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{dy}{dx}=y^{'}$, לכן:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a\xi+b\eta}\right)$$

כאשר המשוואה האחרונה היא הומוגנית.

## מקרה ב׳

אם $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix}=0$ אז $a_1=\lambda a$ ו$b_1=\lambda b$.
נציב ב$f$ ונקבל:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right) &= f\left(\frac{\lambda ax+\lambda by+c_1}{ax+by}\right) \\ &= f_1\left(ax+by\right) \end{aligned}$$

ז"א את המשוואה המקורית אפשר לרשום $y^{'}=f_1\left(ax+by\right)$.

# דוגמה 1

$y^{'}=\frac{6x+2y+1}{3x+y+1}$

## פתרון

קל לראות ש$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=0$ לכן נשתמש במקרה השני.
נציב $z=3x+y$.

$$\begin{aligned} y &= z-3x \\ y^{'} &= z^{'}-3 \end{aligned}$$

נציב במשוואה ונקבל

$$\begin{aligned} z^{'}-3 &= \frac{2z+1}{z-1} \\ z^{'} &= \frac{2z+1+3z-3}{z-1} \\ z^{'} &= \frac{5z-2}{z-1} \\ \int\frac{z-1}{5z-2}dz &= \int dx \\ \frac{1}{5}\cdot\int\frac{5z-5}{5z-2}dz &= \int dx \\ \frac{1}{5}\int\frac{5z-5}{5z-2}dz &= \int dx \\ \frac{1}{5}\int 1-\frac{3}{5z-2}dz &= \int dx \\ \frac{1}{5}\left[z-\frac{3}{5}\ln\left|5z-2\right|+c\right] &= x+c_1 \\ \frac{1}{5}\left[3x+y-\frac{3}{5}\ln\left|5\left(3x+y\right)-2\right|+c_2\right] &= x \end{aligned}$$

## דוגמה 2

מצא פתרון כללי של המשוואה:

$$y^{'} = \frac{x+2y+1}{3x-y+2}$$

### פתרון

קל לראות שהשורות בת"ל.
לכן קיימים מס' $\alpha, \beta$ המקיימים:

$$\begin{aligned}\alpha+2\beta+1 &= 0\\ 3\alpha-\beta+2 &= 0\end{aligned}$$

נפתור את המערכת ונקבל $\beta=-\frac{1}{7}$ ו $\alpha=-\frac{5}{7}$.
לכן נקבל $x=\xi-\frac{5}{7}$, $y=\eta-\frac{1}{7}$.
נוסיף כי $\frac{dy}{dx}=\frac{d\eta}{d\xi}$.
עבור המונה של הפונק' הרציונלית נקבל

$$x+2y+1=\xi-\frac{5}{7}+2\eta-\frac{2}{7}+1=\xi+2\eta$$

עבור המכנה נקבל:

$$3x-y+2=3\xi-\frac{15}{7}-\eta+\frac{1}{7}+2=3\xi-\eta$$

עכשיו ניתן לעשות החלפת משתנים:

$$\begin{aligned}\frac{d\eta}{d\xi} &= \frac{\xi+2\eta}{3\xi-\eta}\\ &= \frac{1+\frac{2\eta}{\xi}}{3-\frac{\eta}{\xi}}\end{aligned}$$

מתבקשת ההצבה $z=\frac{\eta}{\xi}$.
$\eta=z\xi$, לכן $\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{dz}{d\xi}\cdot\xi+z$.

נקבל:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{d\xi}\cdot\xi+z &= \frac{1+2z}{3-z}\\
\frac{dz}{d\xi}\cdot\xi &= \frac{1+2z+z^2-3z}{3-z}\\
\frac{3-z}{z^2-z+1} &= \frac{d\xi}{dz}\cdot\frac{1}{\xi}\\
\int\frac{3-z}{z^2-z+1}dz &= \int\frac{d\xi}{\xi}\\
-\int\frac{z-3}{z^2-z+1}dz &= \ln|\xi|+c\\
-\frac{1}{2}\int\frac{2z-6}{z^2-z+1}dz &= \ln|\xi|+c\\
-\frac{1}{2}\int\frac{2z-1}{z^2-z+1}-\frac{5}{z^2-z+1}dz &= \ln|\xi|+c\\
-\frac{1}{2}\ln\left|z^2-z+1\right|+\frac{5}{2}\int\frac{dz}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} &= \ln|\xi|+c\\
-\frac{1}{2}\ln\left|z^2-z+1\right|+\frac{5}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right) &= \ln|\xi|+c
\end{aligned}$$

נותר להציב את $\xi$ ו$z$.

# משוואות מדויקות

נתונה משוואה:

$$M\left(x,\,y\right)dx+N\left(x,\,y\right)dy=0$$

משוואה תיקרא מדויקת אם מתקיים:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

הפתרון הכללי הינו מהצורה $g\left(x,\,y\right)=y$.

## הערה

הדרך לפתרון דומה לשחזור של פונקציה אנליטית או שדה משמר.

# דוגמה 3

נתונה המשוואה

$$\left(\sin y+\cos x\right)dx+\left(x\cos y+y\right)dy=0$$

מצא $g\left(x,\,y\right)$.

## פתרון

נסמן $M(x,\,y)=\sin y+\cos x$, $N(x,\,y)=x\cos y+y$.
מתקיים

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=\cos y$$

לכן המשוואה מדויקת.
נשתמש בטכניקה הבאה:
אם $g$ מסמנת את הפונק' הקבועה, אז מתקיים:

$$\frac{\partial g}{\partial x}=M$$

נקבל במקרה שלנו:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= \sin y+\cos x\\ g(x,\,y) &= \int\sin y+\cos x dx+c(y)\\ &= x\sin y+\sin x+c(y)\end{aligned}$$

כעת ידוע שמתקיים:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y} &= N\\ &= x\cos y+y\end{aligned}$$

נגזור את $g$ שמצאנו לפי $y$ ונקבל:

$$\begin{aligned}x\cos y+\frac{dc}{dy} &= x\cos y+y\\ \frac{dc}{dy} &= y\\ c &= \frac{y^2}{2}+c_1\end{aligned}$$

לכן

$$g(x,\,y)=x\cos y+y+\frac{y^2}{2}+c_1$$

ולכן פתרון המדר הוא:

$$x\cos y+y+\frac{y^2}{2}=c$$

## דוגמה 4

פתור $2xy^2+2y+\left(2x^2y+2x\right)y^{'}=0$.

### פתרון

נכפול ב$dx$ ונקבל:

$$\left(2xy^2+2y\right)dx+\left(2x^2y+2x\right)dy=0$$

נבדוק אם היא מדויקת:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= 4xy+2\\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 4xy+2\end{aligned}$$

לכן המשוואה מדויקת.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= 2xy^2+2y\\ g\left(x,\,y\right) &= \int 2xy^2+2ydx+c\left(y\right)\\ &= x^2y^2+2xy+c\left(y\right)\\ \frac{\partial g}{\partial y} &= N\\ 2x^2y+2x+\frac{dc}{dy} &= 2x^2y+2x\\ \frac{dc}{dy} &= 0\\ c\left(y\right) &= c\end{aligned}$$

לכן

$$g\left(x,\,y\right)=x^2y^2+2xy+c$$

והפתרון של המד"ר הוא

$$x^2y^2+2xy=c$$

## גורם אינטגרציה

נתונה משוואה:

$$M\left(x,\,y\right)dx+N\left(x,\,y\right)dy=0$$

משוואה שאינה מדויקת.
אם קיימת פונק' $I\left(x,\,y\right)$ כך ש

$$I\left(x,\,y\right)M\left(x,\,y\right)dx+I\left(x,\,y\right)N\left(x,\,y\right)dy=0$$

היא משוואה מדויקת, אז $I\left(x,\,y\right)$ נקרא גורם אינטגרציה.

## דוגמה 5

פתור:

$$ydx - xdy = 0$$

ע"י גורם אינטגרציה.

### פתרון

דרכים אחרות לפתרון הן:

1. הפרדת משתנים - $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ ואז נציב $c = \frac{y}{x}$.
2. נשתמש בתכונות הדיפרנציאל. מכיוון שיש חיסור נחפש פונק' $g$ שהיא מנה של פונק'.

   נחלק את כל המשוואה ב-$x^2$ ונקבל $\frac{ydx-xdy}{x^2} = 0$, וזה למעשה אומר $-\left(\frac{y}{x}\right)' = 0$.

כעת ננסה לדייק את המשוואה.
נסמן $M = y,\ N = -x$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= 1\\ \frac{\partial N}{\partial x} &= -1\end{aligned}$$

לכן המשוואה אינה מדוייקת.
ננחש $I(x, y) = x^{\alpha} \cdot y^{\beta}$.
נכפיל את המשוואה ונקבל

$$x^{\alpha} \cdot y^{\beta+1}dx - x^{\alpha+1} \cdot y^{\beta}dy = 0$$

וזו משוואה מדוייקת, לכן:

$$\begin{aligned}(\beta+1)\, x^{\alpha} \cdot y^{\beta} &= -(\alpha+1)\, x^{\alpha}y^{\beta}\\ \beta+1 &= -\alpha-1\\ \alpha+\beta &= -2\end{aligned}$$

זאת אומרת שבמקרה הנ"ל יש יותר מגורם אינטגרציה אחד, לדוגמה $\frac{1}{x^2}$ או $\frac{1}{xy}$.
נציב במשוואה ונקבל:

$$\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0$$

זו משוואה מדוייקת וקל לפתור.

## כללים למציאת גורם אינטגרציה

1. אם $\frac{M_y - N_x}{N} = u(x)$ אז ניתן למצוא את גורם האינט' ע"י מציאת הפתרון למשוואה:

   $$I'(x) - u(x)\, I(x) = 0$$

   נקבל $I(x) = e^{\int u(x)dx}$.
2. אם $\frac{M_y - N_x}{M} = u(y)$ אז ניתן למצוא את גורם האינט' ע"י מציאת פתרון למשוואה:

   $$I'(x) + u(y) \cdot I(x) = 0$$

   נקבל $I(y) = e^{-\int u(y)dy}$.

## דוגמה 6

פתור:

$$\left(\frac{y}{x} - \sin x\right) dx + dy = 0$$

### פתרון

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{1}{x} \\ N_x &= 0 \end{aligned}$$

מקרה 1 מתקיים, $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1}{x}$ וזה תלוי רק ב-$x$.

$I = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$.

נכפול בגורם האינט' ונפתור:

$$(y - x \sin x)\, dx + x dy = 0$$

זו משוואה מדוייקת.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y} &= x \\ g &= xy + c(x) \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= y + \frac{\partial c}{\partial x} \\ y + \frac{\partial c}{\partial x} &= y - x \sin x \\ \frac{\partial c}{\partial x} &= -x \sin x \end{aligned}$$

עושים אינטגרל בחלקים ומקבלים את $g$.

# כלל

אם $\begin{cases} M = y \cdot f(x, y) \\ N = x \cdot g(x, y) \end{cases}$ אז מתקיים:

$$I(x, y) = \frac{1}{xM - yN}$$

## דוגמה 7

פתור:

$$\left(y - xy^2\right) dx + \left(x + x^2 y^2\right) dy = 0$$

## פתרון

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= 1-2yx\\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 1+2xy^2\end{aligned}$$

זו משוואה לא מדויקת, נשתמש בגורם אינטגרציה.
קל לראות שאפשר להוציא מ$N$ גורם משותף $y$ ומ$N$ גורם משותף $x$ ואז גורם האינטגרציה הוא:

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{x\left(y-xy^2\right)-y\left(x+x^2y^2\right)}\\ &= \frac{1}{x^2y^2-x^2y^3}\end{aligned}$$

גורם האינטגרציה יצא מסובך, בדרך הנ"ל נחפש שיטה אחרת.
נכפול את כל המשוואה ב$\frac{1}{xy}$:

$$\left(\frac{1}{x}-y\right)dx+\left(\frac{1}{y}+xy\right)dy=0$$

נחלק את המשוואה שוב ב$xy$:

$$\left(\frac{1}{x^2y}-\frac{1}{x}\right)dx+\left(\frac{1}{xy^2}+1\right)dy=0$$

וזו יוצאת משוואה מדויקת, בדקו!