תרגיל 10

1. יהי R חוג. הוכיחו שאם כל מודול מעל R הוא נאמן, אז R חוג פשוט.
פתרון:

נניח בשלילה שיש לR אידיאל דו צדדי לא טריוויאלי. נסמנו בI. אז החוג R/I הוא מודול מעל R. ניתן לראות ש$I \subseteq Ann_R(R/I)$ כי לכל $i \in I, r+I \in R/I$ מתקיים: $i(r+I) = ir + I = 0 + I$. לכן המודול אינו נאמן. סתירה.

2. תנו דוגמא לחוג R אידיאל שמאלי לא טריוויאלי I, כך R/I הוא מודול נאמן מעל R.
פתרון:

מכיוון שמעל חוג פשוט כל מודול הוא נאמן, ניתן לקחת למשל $R = M_n(F)$, וכל אידיאל שמאלי לא טריויאלי יעבוד.

3. יהי R חוג. ניזכר ש-R הוא מודול מעל עצמו.

(א) הוכיחו: R מודול פשוט מעל עצמו אם ורק אם R הוא חוג עם חילוק.

(ב) נניח ש-R חילופי, ויהי $I \lhd R$ אידאל של R (לכן הוא גם תת־מודול של R כמודול מעל עצמו). הראו ש-I נוצר על ידי d איברים כאידאל (כלומר $I = \langle a_1, \ldots, a_d \rangle$) אם ורק אם I נוצר על ידי d איברים כתת־מודול של R.

(ג) תנו דוגמה למודול ציקלי M מעל חוג R ולתת־מודול $N \leq M$ כך ש-N אינו ציקלי. (רמז: $M = R$ עבור R לא תחום ראשי)

i. אנחנו יודעים שתת-המודולים הם בדיוק האידאלים השמאליים של R. לכן R פשוט מעל עצמו אם ורק אם אין לו אידאלים שמאליים לא טריוויאליים אם ורק אם הוא חוג עם חילוק (שאלה מהבוחן הראשון).

א'. נשים לב שההגדרות פשוט מתלכדות. I נוצר על ידי $a_1, \ldots, a_d$ כאידאל אם

$$I = \langle a_1, \ldots, a_d \rangle = Ra_1 + \cdots + Ra_d$$

(כאן אנחנו משתמשים בחילופיות של R). I נוצר על ידי $a_1, \ldots, a_d$ כמודול אם הם פורשים אותו, כלומר

$$I = Ra_1 + \cdots + Ra_d.$$

ב'. ניקח $R = F[x, y]$ ו-$I = \langle x, y \rangle$. R הוא ציקלי מעל עצמו, אבל I הוא לא תת-מודול ציקלי של R כי הוא לא אידאל ראשי.

4. ניזכר כי $\mathbb{Q}$ הוא חבורה אבלית ולכן מודול מעל $\mathbb{Z}$. הוכיחו של$\mathbb{Q}$ לא קיים בסיס כמודול מעל $\mathbb{Z}$.

פתרון. כל שני שברים הם תלויים כי עבור $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ מתקיים

$$bc\frac{a}{b} - ad\frac{c}{d} = 0$$

ולכן אם $\mathbb{Q}$ היה חופשי, הוא היה חייב להיות מדרגה 1, כלומר ציקלי ואז $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Z}$ כחבורות אבליות, מה שכמובן איננו נכון (למה?).
העשרה: אם R תחום שלמות שאינו שדה ו-F הוא שדה השברים שלו, אז F אינו חופשי כמודול מעל R מטיעון דומה (אם F היה חופשי מדרגה 1, אז $F \cong R$ (מדוע?), בסתירה; לכן חייבים להיות לפחות שני שברים בבסיס, אבל כל שני שברים תלויים לינארית).

5. יהי M מודול מעל חוג מנה R/I. הוכיחו כי M הוא מודול מעל R לפי הפעולה $rm := (r+I)m$. בנוסף הוכיחו $I \subseteq Ann_R(M)$.

6. יהי M הוא מודול מעל חוג R, ויהי $I \lhd R$ אידאל. הראו ש-IM (מוגדר להיות כל מה שנוצר ע"י איברים מהצורה im, עבור $i \in I$ ו$m \in M$) הוא תת-מודול של M מעל R, וכי ${}^{M}/_{IM}$ יורש באופן טבעי מבנה של מודול מעל ${}^{R}/_{I}$.

פתרון.

1. נוודא את אקסיומות המודול:

$$(r+r')m = (r+r'+I)m = ((r+I)+(r'+I))m = (r+I)m + (r'+I)m = rm + r'm$$
$$r(m+m') = (r+I)(m+m') = (r+I)m + (r+I)m' = rm + rm'$$
$$(rr')m = (rr'+I)m = ((r+I)(r'+I))m = (r+I)((r'+I)m) = r(r'm)$$
$$1_R m = (1_R + I)m = 1_{R/I}m = m$$

בנוסף, אם $r \in I$ אז $rm = (r+I)m = (0+I)m = 0_M$, לכן $I \subseteq Ann(M)$.

2. קודם כל ניזכר בהגדרה של IM: $IM = \{\sum_{i=1}^{n} r_i m_i \mid r_i \in I, m_i \in M\}$. לכן ברור שזו תת-חבורה חיבורית של M. היא סגורה לכפל בסקלר כי $R(IM) = (RI)M = IM$.
כדי להגדיר מבנה של ${}^{R}/_{I}$-מודול על ${}^{M}/_{IM}$, צריך להגדיר את הכפל

$$.(r+I)(m+IM)$$

אין הרבה ברירות אלא להגדיר אותו

$$.(r+I)(m+IM) = rm + IM$$

צריך לוודא שזה מוגדר היטב. אכן, אם $r+I = r'+I$, אז $r - r' \in I$, ולכן

$$(r+I)(m+IM) = rm+IM = r'm+\underbrace{(r-r')m}_{\in IM}+IM = r'm+IM = (r'+I)(m+IM)$$

בנוסף, אם $m+IM = m'+IM$, אז $m - m' \in IM$, ולכן

$$.(r+I)(m+IM) = rm+IM = rm'+r\underbrace{(m-m')}_{\in IM}+IM = rm'+IM = (r+I)(m'+IM)$$

בדיקת אקסיומות המודול היא ישירה.