פתרון בוחן אמצע - חדו"א 1ת

סמסטר חורף - תשע"א

שאלה 1:

תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות. ידוע כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ וכי הסדרה $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה. הראו כי $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow \exists N : \forall n > N,\, a_n > 0\, (\textbf{so we can devide by } a_n)$$

$$\exists M > 0 : |a_n b_n| < M,\, \forall n \implies -\frac{M}{a_n} < b_n < \frac{M}{a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \implies \lim_{n\to\infty} \frac{M}{a_n} = 0 \;\implies \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \;(\textbf{by sandwich theorem).}$$

שאלה 2:

א. חשבו את הגבול: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$.

ב. חשבו את הגבול: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt[n]{1^n+\ldots+n^n}}$.

פתרון:

א.

$$\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \left[\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}}\right]^{n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n}}$$

הביטוי בסוגריים המרובעים שואף ל e, החזקה שואפת ל 1, ומכיוון ששני הגבולות סופיים כל הביטויי שואף ל e^1.

ב.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt[n]{n^n}} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt[n]{1^n+\ldots+n^n}} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt[n]{nn^n}} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\sqrt[n]{n}}$$

שני האגפים שואפים ל e ולכן מסנדויץ זהו גם הגבול המבוקש.

שאלה 3:

תהי $\{a_n\}$ הסדרה המוגדרת ע"י $a_1 = 1$ ולכל $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2} > a_n$. הראו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

פתרון:

מתקיים לכל n: $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2} > a_n$, לכן a_n מונוטונית עולה, ומכיוון ש $a_1 = 1$ היא גם חיובית.

נניח בשלילה שהגבול הוא לא ∞. סדרה מונוטונית עולה ולא חסומה בהכרח שואפת לאינסוף, לכן על פי הנחתינו a_n חסומה ומכיוון שהיא מונוטונית אז היא חייבת להיתכנס לגבול סופי L כלשהו.

נשאיף את n לאינסוף ונקבל:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(a_n + \frac{1}{a_n^2}\right) = L + \frac{1}{L^2} \implies \frac{1}{L^2} = 0$$

וזאת כמובן סתירה.

* הערה ־ השתמשנו באריתמטיקה של גבולות מכיוון שהגבולות של $a_n, \frac{1}{a_n^2}$ קיימים וסופיים.

שאלה 4:

לתת דוגמא נגדית לשלושת הסעיפים הבאים:

א. תהי $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ פונקציה. אם לכל סדרה מונוטונית עולה ממש $\{x_n\}$בקטע $(0,1)$ קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$, אזי f רציפה.

ב. $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציה וחסומה, אזי בהכרח יש לה מינימום או מקסימום.

ג. $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ רציפה, ותהיינה נתונות שתי סדרות $\{x_n\},\{y_n\}$ בקטע $(0,1)$כך ש $\lim_{n\to\infty} x_n-y_n=0$. אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ אזי גם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$.

פתרון:

א. $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq\frac{1}{2}\\ 0, & x=\frac{1}{2}\end{cases}$ (או כל דוגמא אחרת מכמה אלפי הדוגמאות האפשריות).

ב. $f(x)=\sin\frac{1}{x}e^{-x}$ אפשר לבנות עוד דוגמאות. הרעיון הוא שצריכים להיות תנודות ליד אפס, כדי שלא יהיה שם גבול, והאמפליטודה צריכה לגדול כשמתקרבים לאפס, כדי שלא יהיה מקס' או מינ' מוחלט לפני אפס.

ג. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, והסדרות הן למשל: $x_n=\frac{1}{\pi n},\ y_n=\frac{1}{\pi n+\pi/2}$.

שאלה 5:

תהי $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נתון כי f אינה מקבלת מקס' או מינ', וכי $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)$. הראו כי יש ל־ f נקודת מינימום מקומי בקטע $(0,1)$.

פתרון:

f רציפה בקטע הסגור $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$ ולכן על פי ויירשטראס מקבלת שם מינימום מוחלט (זה לא מינימום מוחלט ב $(0,1)$, אלא רק ב $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$!) בנקודה $c\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$ כלשהי.

אם c נקודה פנימית, אז סיימנו (כי אז היא גם נקודת מינ' מקומי), אחרת $c=\frac{1}{2}$ או $c=\frac{3}{4}$.

נסמן $t=f\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=f(c)$, אזי קיימת נקודה $a\in(0,1)/[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$ כך ש $f(a)>t$ (אחרת c היא נק' מינ' גלובלי בסתירה לנתון).

באותו אופן, קיימת נקודה כלשהי $b\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$ כך ש $f(b)>t$ (אחרת f קבועה ב $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$ ואז כל נקודה היא מינ' מקומי).

נניח בלי הגבלת הכלליות כי $a\in(0,\frac{1}{2})$, אזי בקטע $[a,b]$ על פי ויירשטראס קיימת נקודת מינ' גלובלית, $x_m\in[a,b]$, ומתקיים כי $f(x_m)\leq f(c)=t<f(a),\ f(b)$ ולכן לא יתכן כי x_m מתקבלת בקצוות, ולכן היא נקודה פנימית של $[a,b]$ ולכן היא גם מינימום מקומי.