תרגיל 14 – אלגברה מופשטת 1

1. מצאו סדרת הרכב ל D_4. הסיקו ש- D_4 פתירה.

פתרון: הסדרה $D_4 \triangleright <\sigma> \triangleright <\sigma^2> \triangleright \{id\}$ היא סדרת הרכב שבה כל הגורמים הם פשוטים (איזומורפיים ל- Z_2), ולכן החבורה פתירה. שימו לב שזאת לא סדרת ההרכב היחידה. לדוגמה: $D_4 \triangleright <\sigma^2,\tau> \triangleright <\tau> \triangleright \{id\}$.

2. הוכיחו או הפריכו:

2.1. כל חבורה G מסדר 1089 היא פתירה.

פתרון: $1089 = 3^2 \cdot 11^2$. מתקיים: $n_{11} \equiv 1 \left(\text{mod}11\right) \ \wedge \ n_{11} \mid 3^2$ ולכן $n_{11}=1$, ולכן

תת החבורה 11-סילו Q היא נורמלית ומתקיים $|Q|=11^2$ ולכן היא אבלית.

לפיכך, בסדרה הנורמלית $G \triangleright Q \triangleright \{e\}$ כל הגורמים הם אבליים ולכן

החבורה G היא פתירה.

2.2. כל חבורה G מסדר 60 היא פתירה.

פתרון: לא נכון. A_5 היא חבורה לא פתירה (ראינו בכיתה) מסדר 60.

3. ענו על הסעיפים הבאים.

3.1. תהי G חבורה בת 35 איברים. הוכיחו כי G פתירה.
הוכחה: $|G|=35=3\cdot 5$ וראינו בתרגול כי כל חבורה מסדר pq עבור p,q ראשוניים פתירה.

3.2. תהי G חבורה בת 125 איברים. האם בהכרח G פתירה?
תשובה: כן. $|G|=5^3$ לכן G חבורת p עבור $p=5$. לפי משפט, כל חבורת p פתירה.

4. (שאלה ממבחן מועד א', קיץ 2006)

מעל קבוצה $R \times R^*$ נגדיר פעולה $(a_1,b_1)\bullet(a_2,b_2)=(a_1+b_1a_2,b_1b_2)$. הוכיחו:

4.1. $G=(R\times R^*,\bullet)$ חבורה.

הוכחה: *סגירות: יהיו $(a,b),(c,d)\in R\times R^*$ אזי

$$(a,b)\bullet(c,d)=(a+bc,bd)\in R\times R^*$$

(R סגור לכפל וחיבור ו R^* סגור לכפל).

*אסוציאטיביות: יהיו $(a,b),(c,d),(f,g)\in R\times R^*$ אזי:

$$((a,b)\bullet(c,d))\bullet(f,g)=(a+bc,bd)\bullet(f,g)=(a+bc+bdf,bdg)$$
$$(a,b)\bullet((c,d)\bullet(f,g))=(a,b)\bullet(c+df,dg)=(a+b(c+df),bdg)=(a+bc+bdf,bdg)$$
$$\Rightarrow((a,b)\bullet(c,d))\bullet(f,g)=(a,b)\bullet((c,d)\bullet(f,g))$$

*איבר נייטרלי: נראה ש $e=(0,1)$ איבר נייטרלי של G. יהי $(a,b)\in R\times R^*$ אזי

$$(a,b)\bullet(0,1)=(a+b\cdot 0,b\cdot 1)=(a,b)\quad,\quad(0,1)\bullet(a,b)=(0+1\cdot a,1\cdot b)=(a,b)$$

*הופכי: נראה כי לכל איבר $(a,b)\in R\times R^*$, $(-a/b,1/b)$ הופכי משמאל.
(ואז,מכיוון שכל איבר הפיך משמאל, כל איבר הפיך).

$$(-a/b,1/b)\bullet(a,b)=(-a/b+(1/b)\cdot a,(1/b)\cdot b)=(0,1)=e$$

4.2. G אינה אבלית.
הוכחה: $(1,2)\bullet(3,5)=(7,10)\neq(8,10)=(3,5)\bullet(1,2)$

4.3. קיים מונומורפיזם $G\to GL_2(R)$.

הוכחה: נגדיר $f:G\to GL_2(R)$ ע"י $f(a,b)=\begin{pmatrix} b & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

שימו לב כי מכיוון ש $b\in R^*$, $\begin{pmatrix} b & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in GL_2(R)$ ו f מוגדרת היטב.

נראה כי f הוא מונומורפיזם.
שמירת פעולה: לכל $(a,b),(c,d)\in G$ מתקיים:

$$f((a,b)\bullet(c,d))=f((a+bc,bd))=\begin{pmatrix} bd & a+bc \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=f((a,b))f((c,d))$$

לכן f הומו'.
חח"ע: ברורה מההגדרה והגדרת השוויון בין מטריצות.
לכן f הוא מונומורפיזם.

4.4. G חבורה פתירה. רמז: השתמשו בסעיף הקודם ובחישוב קומוטטורים.

הוכחה: נשים לב f מהסעיף הקודם הוא מונומורפיזם. לכן, ע"י צמצום הטווח נקבל איזו':

$$f:G\to \mathrm{Im}(f)=\left\{\begin{pmatrix} b & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\middle| a,b\in R\right\}\leq GL_2(R)$$

נסמן $H=\mathrm{Im}(f)$, אזי $G\cong H$ לכן, G פתירה אם ורק אם H פתירה.
נראה כי H פתירה באמצעות חישוב קומוטטורים.
לכל $A,B\in H$, $A=\begin{pmatrix} b & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} d & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ נחשב את הקומוטטור:

$$[A,B]=ABA^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix} b & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{b} & -\frac{a}{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{d} & -\frac{c}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} bd & a+bc \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{bd} & -\frac{a}{b}-\frac{c}{bd} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -ad-c+a+bc \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כלומר כל קומוטטור הוא מהצורה $[A,B]=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ עבור $x\in R$ כלשהו.

אבל לכל $x,y\in R$, $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, לכן כל שני קומוטטורים מתחלפים.

לכן, H' הנוצרת ע"י הקומוטטורים, אבלית (אם היוצרים של ת"ח מתחלפים – החבורה אבלית).

לכן $H''=\{e\}$, H פתירה וכך גם G.

5. (שאלה ממבחן מועד א', קיץ 2006)

נסמן $[a,b]:=aba^{-1}b^{-1}$ ("הקומוטטור") של $a,b\in G$ בחבורה G.

נגדיר ת"ח $G':=\langle\{[a,b]: \quad a,b\in G\}\rangle\le G$ הנוצרת ע"י קבוצת הקומוטטורים. הוכיחו:

5.1. $G'\triangleleft G$.

הוכחה: מהגדרתה, $G'\le G$. נוכיח נורמליות. יהיו $g\in G$ $h\in G'$, מ"ל $ghg^{-1}\in G'$.

$h\in G'=\langle\{[a,b]:a,b\in G\}\rangle$ לכן מהגדרת ת"ח נוצרת, קיימים קומוטטורים $A_1,...,A_n$ כך ש $h=A_1^{k_1}A_2^{k_2}\cdots A_n^{k_n}$.

נראה תחילה שלכל קומוטטור A, $gAg^{-1}\in G'$. אכן, יהי $A=[a,b]$ קומוטטור

אזי,

$$gAg^{-1}=g[a,b]g^{-1}=gaba^{-1}b^{-1}g^{-1}=(gag^{-1})(gbg^{-1})(ga^{-1}g^{-1})(gb^{-1}g^{-1})=$$
$$(gag^{-1})(gbg^{-1})(gag^{-1})^{-1}(gbg^{-1})^{-1}=[gag^{-1},gbg^{-1}]\in G'$$

בנוסף, לכל חזקה $n\in Z$ של A,

$(gAg^{-1})^n=(gAg^{-1})(gAg^{-1})\cdots(gAg^{-1})=gA^ng^{-1}\in G'$ כי G' סגורה לכפל.

לכן, $ghg^{-1}=gA_1^{k_1}A_2^{k_2}\cdots A_n^{k_n}g^{-1}=(gA_1^{k_1}g^{-1})(gA_2^{k_2}g^{-1})\cdots(gA_n^{k_n}g^{-1})\in G'$ בגלל הסגירות של G'.

5.2. G/G' אבלית.

הוכחה: יהיו $aG',bG'\in G/G'$. צ"ל $aG'bG'=bG'aG'$ אבל $aG'bG'=abG'$ ו $bG'aG'=baG'$ לכן, מתקיים שוויון אם ורק אם $abG'=baG'$. לפי משפט לגרנז', מתקיים שוויום אמ"ם $(ba)^{-1}(ab)\in G'$, אבל

$(ba)^{-1}(ab)=a^{-1}b^{-1}ab=[a^{-1},b^{-1}]\in G'$ לכן $aG'bG'=bG'aG'$ ו G' אבלית.

5.3. אם $f:G\to Y$ הומומורפיזם ו Y חבורה אבלית אז $G'\subseteq \ker f$.

הוכחה: נתון Y אבלית. כמו כן f הומומורפיזם. לכן:

$$\forall g_1,g_2\in G:\ \ f\left(g_1\right)\cdot f\left(g_2\right)=f\left(g_2\right)\cdot f\left(g_1\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$f\left(g_1g_2\right)=f\left(g_2g_1\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$f\left(g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}\right)=e_Y$$

כלומר: $\forall g_1,g_2\in G:\left[g_1,g_2\right]\in\ker\left(f\right)$ ומתוך הסגירות של $\ker\left(f\right)$ מתקבל שהנגזרת: $G'=\left\langle\left\{\left[g_1,g_2\right]\mid g_1,g_2\in G\right\}\right\rangle$ מוכלת ב-$\ker\left(f\right)$.

6. ענו על הסעיפים הבאים:

6.1 מצאו את $\left(A_4\right)'$.

פתרון: נסמן ב- V את חבורת קליין. מתקיים $A_4/V\cong\mathbb{Z}_3$ ולכן $\left(A_4\right)'\leq V$.
מכיוון ש-$\left(A_4\right)'\lhd A_4$ יש לנו רק שתי אפשרויות: $\left(A_4\right)'=\{id\}$ או $\left(A_4\right)'=V$.
האפשרות הראשונה נפסלת (מדוע?) ולכן $\left(A_4\right)'=V$.

6.2 מצאו את $\left(S_4\right)'$.

פתרון:
ההתחלה היא כמו בדרך א': מבינים ש-$\left(S_4\right)'\leq A_4$ ויש לפסול את האפשרות ש- $\left(S_4\right)'=V$. כעת נמצא איזשהו איבר בקומוטטור, למשל: $\left[(123),(12)\right]=(123)(12)(132)(12)=(132)$ ולכן $(132)\in\left(S_4\right)'$. מכיוון ש-$\left(S_4\right)'\lhd S_4$ היא חייבת להכיל את כל המחזורים באורך 3, ולכן $\left(S_4\right)'=A_4$.

7. הוכיחו שכל חבורה מסדר 88 היא פתירה.

פתרון: $88=2^3\cdot 11$. $n_{11}\mid 8\wedge n_{11}\equiv 1\pmod{11}$ ולכן $n_{11}=1$. מכאן קיימת תח"נ 11-סילו ל-G; נסמנה H. תת החבורה H היא ציקלית מסדר ראשוני ולכן אבלית ופתירה. G/H חבורת p, שכן סדרה הוא 2^3 ולכן היא פתירה. מכיוון ש H ו-G/H פתירות נקבל עפ"י משפט ש- G פתירה.

בהצלחה! ☺