<u>תשובות לתרגיל 3 בסטטיסטיקה והסתברות.</u>

<u>תשובה 1:</u>

א. לא נכון. קחו $B=\phi$ ו- $A=C=\{1\}$. במקרה זה $(A\cup B)\setminus C=\phi$ ו $A\cup(B\setminus C)=\{1\}$.

ב. לא נכון. קחו $A=B=\{1\}$, $C=\phi$.

ג. הטענה נכונה. אפשר לראות זאת לפי טבלה או לפי דיאגרמה. כל אחד מ $(A\cap B),(A\cap C),(B\cap C)$ מוכל ב $A\cup B\cup C$ ולכן גם איחודם מוכל ב $A\cup B\cup C$.

ד. לא נכון. ניקח $A=B=\{1\}$. במקרה זה $(A\cup B)\setminus A=\{1\}\setminus\{1\}=\phi$.

<u>תשובה 2:</u>

נסמן ב- G=True הדשא רטוב . G=False הגשם אינו רטוב. (לשם קיצור נסמן T ו- F בהתאמה)

נסמן ב- S=T הממטרה פועלת . S=F הממטרה לא פועלת. באופן דומה R=T יורד גשם. R=F לא יורד גשם אזי לפי נוסחאת בייס נקבל:

נסמן $P(A,B)=P(A\cap B)$ ובאופן דומה $P(A,B,C)=P(A\cap B\cap C)$.

במעבר השני משתמשים במונה ובמכנה בעיקרון :

$$P(A)=P(A\cap(B\cup B^C))=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$$

לדוגמא במונה:

$$P(G=T,R=T)=P(G=T,(S=T)\cup(S=F),R=T)=$$

$$=P(G=T,S=T,R=T)+P(G=T,S=F,R=T)$$

בקטן מסומן עבור כל מספר מאיזו אפשרות הגיע: **TTF** מסמן **G=T,S=T,R=F** .

$$\mathrm{P}(R=T\mid G=T)=\frac{\mathrm{P}(G=T,R=T)}{\mathrm{P}(G=T)}=\frac{\sum_{S\in\{T,F\}}\mathrm{P}(G=T,S,R=T)}{\sum_{S,R\in\{T,F\}}\mathrm{P}(G=T,S,R)}$$

$$\frac{0.99\cdot0.01\cdot0.8_{TTT}+0.8\cdot0.99\cdot0.8_{TFT}}{0.99\cdot0.01\cdot0.8_{TTT}+0.9\cdot0.4\cdot0.2_{TTF}+0.8\cdot0.99\cdot0.8_{TFT}+0\cdot0.6\cdot0.2_{TFF}}=$$

$$=\frac{1.4435}{1.5155}=0.952$$

המעבר מהשורה הראשונה לשניה (הצבת הערכים המספריים) מתבסס על הזהות הבאה הנגזרת מכלל בייס $P(X|Y)P(Y)=P(X,Y)$:

$$\mathrm{P}(X,Y,Z)=\mathrm{P}(X|Y,Z)\mathrm{P}(Y,Z)=\mathrm{P}(X|Y,Z)\mathrm{P}(Y|Z)\mathrm{P}(Z)$$

תשובה 3:

1.

שימו לב המעבר הראשון הוא בידיוק התרגיל שעשינו בכיתה.

א.

$$P\left(A^C \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P\left(A^C\right)$$

ב.

$$P\left(A^C \cap B^C\right) = P\left(A^C\right) - P\left(A^C \cap B\right) =$$
$$= P\left(A^C\right) - P\left(A^C\right)P(B) = P\left(A^C\right)(1 - P(B)) =$$
$$= P\left(B^C\right)P\left(A^C\right)$$

2. בהגדרה של 'מאורעות A B ו - C בלתי תלויים' יש 4 דרישות. מספיק שאחת מהן לא מתקיימת והם מאורעות תלויים. בשאלה 1 רק הדרישה $P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$ לא מתקיימת, ולכן A B ו - C תלויים.

תשובה 4:

נחשב לפי $P(X = k) = P(X \le k) - P(X < k) = P(X \le k) - P(X \le k-1)$. ההסתברות

ששלושתם יבחרו קומה נמוכה או שווה ל K היא: $P(X \le K) = \left(\frac{k}{5}\right)^3$ לכן

X: הקומה האחרונה אליה הגיעה המעלית	P(X=k)
1	$\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$
2	$\left(\frac{2}{5}\right)^3 - \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{7}{125}$
3	$\left(\frac{3}{5}\right)^3 - \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{19}{125}$
4	$\left(\frac{4}{5}\right)^3 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{37}{125}$
5	$\left(\frac{5}{5}\right)^3 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{61}{125}$

תשובה 5:

נשתמש בנוסחאת ההסתברות השלמה. יהי A_i - המלפפון נמצא ברווח ה – i מתוך *n-1* הרווחים. ההסתברות לכל רווח היא $\frac{1}{n-1}$. אם המלפפון נמצא ברווח ה – i משמעו שיש i גבינות משמאלו ו- $n-i$ מימינו. סך האפשרויות לבחר מקומות עבור גבינת העיזים והצפתית $\binom{n-1}{2}$. סך האפשרויות לבחור להן מקומות כך ש שהמקומות נמצאים משני צידי המלפפון בהינתן שהמלפפון נמצא ברווח ה – i הוא $(n-i)\cdot i$. נסמן ב B – גבינת העיזים והצפתית משני צידי המלפפון. ונחשב

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n-1}P(A_i)P(B\mid A_i)=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n-1}\frac{i(n-i)}{\binom{n}{2}}=\frac{2}{(n-1)^2 n}\left(\sum_{i=1}^{n-1}ni-\sum_{i=1}^{n-1}i^2\right)$$

$$=\frac{2}{(n-1)^2 n}\left(\frac{(n-1)n^2}{2}-\frac{(n-1)(2n-1)2n}{12}\right)=\frac{6n-4n+2}{6(n-1)}=\frac{n+1}{3n-3}$$

שימו לב שכאשר מספר הגבינות, n, הוא גבוה, ההסתברות מתקרבת לשליש. אם לא היתה מגבלה על המלפפון שעליו להיות דווקא ברווח בין גבינות (ולא בצדדים), אזי ניתן היה לפתור את התרגיל באופן פשוט הרבה יותר: מסדרים שלושה עצמים בשורה, מה הסיכוי שעצם א' יהיה האמצעי. כאן ברור שהתשובה היא שליש. ככל שיש יותר גבינות, כך האיסור על המלפפון להיות בצדדים נהיה זניח (שני המקומות הקיצוניים מהווים חלק יותר קטן מהמבחר שלו) ולכן הסיכוי מתקרב לשליש.

תשובה 6:

נגדיר את המאורעות : L : הסטודנט למד את נושא השאלה . R : הסטודנט ענה נכונה לשאלה. אנו מעוננינים למצא את $P(L|R)$ כשנתון לנו ש $P(L)=p$, $P(R|L)=1$. כמובן שחוק בייס דרוש כאן :

$$.P(L/R)=\frac{P(R/L)P(L)}{P(R)}=\frac{P(R/L)P(L)}{P(R/L)P(L)+P(R/\overline{L})P(\overline{L})}=\frac{1\cdot p}{1\cdot p+\frac{1}{m}\cdot(1-p)}$$

$$.P(L/R)=\frac{pm}{pm+(1-p)}$$

עבור $m=1$ מקבלים $P(L|R)=p$. במקרה זה מאחר ויש רק תשובה אחת אפשרית הסטודנט בכל מקרה יענה נכונה בלי תלות האם למד או לא. לכן ההסתברות שלמד נשארת ללא שינוי ולהתנייה אין משמעות. לכל m אם הסטודנט למד את החומר הוא יענה נכון, לעומת זאת אם לא למד ההסתברות שיענה נכונה שואפת לאפס עם גדילת m . אפשר לראות זאת בצורה ברורה בפירוק שהתבצע במכנה בנוסחא שלעיל.

עבור $m\to\infty$ כצפוי

$$.\lim_{m\to\infty}P(L/R)=\lim_{m\to\infty}\frac{pm}{pm+(1-p)}=1$$

תשובה 7:

נגדיר את המאורעות הבאים : A : חולצה מיוצרת במפעל A. B_1 : החולצה מיוצרת במפעל B במשמרת יום . B_2 : החולצה מיוצרת במפעל B במשמרת לילה. C : החולצה הנבחרת פגומה.

א.

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C/A)P(A) + P(C/B_1)P(B_1) + P(C/B_2)P(B_2) \\ &= 0.2 \cdot 0.4 + 0.1 \cdot (0.7 \cdot 0.6) + 0.3 \cdot (0.6 \cdot 0.3) \approx 0.176 \end{aligned}$$

ב.

$$P(A/C) = \frac{P(C/A)P(A)}{P(C)} = \frac{0.2 \cdot 0.4}{0.176} \approx 0.45$$

ג.

$$P(B_1/C) = \frac{P(C/B_1)P(B_1)}{P(C)} = \frac{0.1 \cdot (0.6 \cdot 0.7)}{0.176} \approx 0.24$$

ד.

$$P(B_2/C) = \frac{P(C/B_2)P(B_2)}{P(C)} = \frac{0.3 \cdot (0.3 \cdot 0.6)}{0.176} \approx 0.31$$