תרגיל 1

28 באוקטובר 2015

1. הוכיחו באינדוקציה:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

לכל n טבעי
בסיס: ברור.
נניח נכונות עבור n, מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\left[2n^2+7n+6\right]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

2. הוכיחו באינדוקציה:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

לכל $1 < n$ טבעי

פיתרון: בסיס האינדוקציה עבור $n = 2$ ברור.
צעד האינדוקציה: נניח שמתקיימת הנוסחא עבור $1 < n$ נוכיח שהיא מתקיימת גם עבור $n+1$: $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}} > \frac{\sqrt{n}\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}} = \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$.

3. הוכיחו באינדוקציה:

$$\frac{1+2+4+8+...+2^{5n-1}}{31} \in \mathbb{N}$$

לכל n טבעי

פיתרון: בסיס האינדוקציה: $n=1$ מתקיים $\frac{1+2+4+...+2^4}{31}=\frac{1+2+4+8+16}{31}=\frac{31}{31}=1\in\mathbb{N}$.

צעד האינדוקציה: נניח נכונות בור $n>1$ נוכיח נכונות עבור $n+1$:

$$\frac{2^0+2^1+\cdots+2^{5(n+1)-2}+2^{5(n+1)-1}}{31} = \frac{2^0+2^1+\cdots+2^{5(n+1)-2}+2^{5n-1}2^5}{31} =$$
$$\frac{2^0+2^1+\cdots+2^{5(n+1)-2}+2^{5n-1}}{31}+\frac{\left(2^5-1\right)2^{5n-1}}{31} = \frac{2^0+2^1+\cdots+2^{5n-1}}{31}+2^{5n-1}\in\mathbb{N}$$

.