(I)

פיסיקה קלאסית 1 - תרגיל 12

1) א. מאחר ונתונה צפיפות מסה שטחית כדאי לבחור בקואורדינטות dxdy לחשב ביחס לקודקוד השמאלי ולהציג את התשובה בעזרת משפט שטיינר.

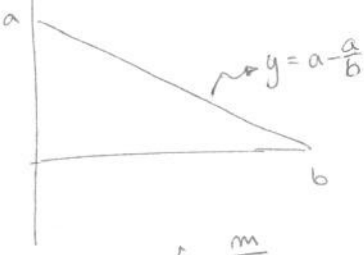
$$I = \int x^2 dm = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_0^{b} x^2 \sigma \, dx dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_0^{b} x^2 \frac{2m}{ab^2} x \, dx dy = \frac{2m}{\cancel{a}b^2}\int_0^b x^3 dx \, \cancel{a} = \frac{2m}{b^2}\frac{1}{4}b^4 = \frac{1}{2}mb^2$$

~~גם הפעם כך~~

$$I_A = I_{cm} + ma^2$$

$$\hookrightarrow \boxed{I_{cm} = I_A - ma^2 = \frac{1}{2}mb^2 - m\left(\frac{1}{2}b\right)^2 = mb^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}mb^2}$$

ב.



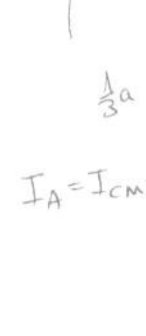
$$\sigma = \frac{m}{\frac{1}{2}ab}$$

$$I = \int x^2 dm = \sigma \int_0^{b}\int_0^{a-\frac{b}{a}x} x^2 \, dx dy = \sigma \int_0^b x^2\left(a - \frac{a}{b}x\right)dx =$$

$$= \sigma\left[a\frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{b}\frac{1}{4}x^4\right]_0^b = \sigma\left(\frac{1}{3}ab^3 - \frac{1}{4}\frac{a}{b}b^4\right) =$$

$$= \sigma\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)ab^3 = \frac{1}{12}\sigma ab^3 = \frac{1}{12}ab^3\frac{m}{\frac{1}{2}ab} = \boxed{\frac{1}{6}mb^2}$$

ג. חישוב של גליל סביב ציר הסימטריה. קואורדינטות גליליות יעזרו לנו כאן:



$$I = \iiint r^2 \rho \, r dr d\theta dz = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^l dz = \rho \frac{1}{4}R^4 2\pi l = \frac{1}{2}\pi R^4 l \rho = \frac{1}{2}\pi R^4 l \frac{m}{\pi R^2 l} = \frac{1}{2}mR^2$$

עתה נחשב את מומנט ההתמד של גליל קטן ברדיוס $\frac{1}{3}a$ ומסה m לציר סיבוב מקביל במרחק $\frac{1}{3}a$

$$I_A = I_{cm} + \cancel{md^2} = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{3}a\right)^2 + m\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{9}ma^2 + \frac{1}{4}ma^2 = \frac{1}{2}ma^2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}ma^2\frac{11}{18}$$

ניתן לחשב את מומנט ההתמד כסופרפוזיציה של גליל גדול פחות 4 גלילים קטנים:

$$I = \frac{1}{2}Ma^2 - \cancel{4}^{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}ma^2\frac{11}{\cancel{18}_{9}}\right) = \frac{1}{2}Ma^2 - \frac{11}{9}ma^2$$

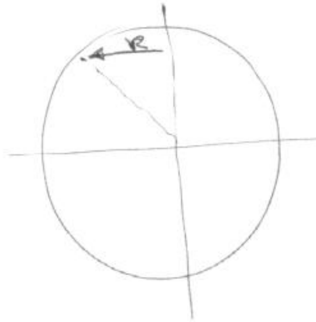
היחס בין המסות הוא כיחס הרדיוסים: $\frac{M}{m} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{a^2}{(\frac{1}{3}a)^2} \Rightarrow m = M\frac{1}{9}$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}Ma^2 - \frac{11}{9}\cdot\frac{1}{9}Ma^2 = Ma^2\left(\frac{1}{2}-\frac{11}{81}\right) = \frac{59}{162}Ma^2}$$

(II)

נעבר בקואורדינטות כדוריות : (2

$R = r\sin\theta$

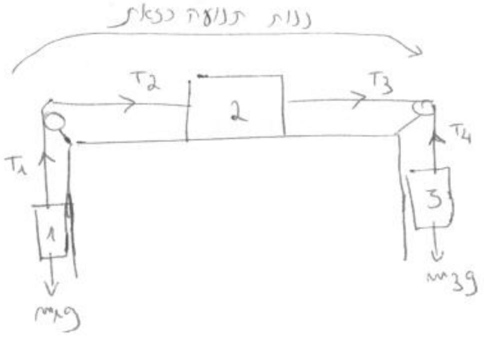


$$\boxed{I} = \int R^2 dm = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} (r\sin\theta)^2 \rho\, r^2 dr\, d\theta \sin\theta\, d\phi = \rho 2\pi \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi} \sin^2\theta \sin\theta d\theta =$$

$$= 2\pi\rho \frac{1}{5}R^5 \int_{\pi}^{0} (1-\cos^2\theta)\, d\cos\theta = \frac{2}{5}\pi R^5 \rho \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = \frac{2}{5}\pi R^5 \rho \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{2}{5}\pi R^5 \rho\, \frac{2}{3}\cdot 2 = \frac{4}{3}\frac{2}{5}\pi R^5 \cdot \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \underline{\frac{2}{5} m R^2}$$

(3



(i) $T_1 - m_1 g = m_1 a_1$

(ii) $RT_2 - RT_1 = I\alpha_1$

$R\alpha_1 = a_1 \rightarrow \alpha_1 = \frac{a_1}{R}$

(iii) $T_3 - T_2 = m_2 a_2$

(iv) $RT_4 - RT_3 = I\alpha_2$

$R\alpha_2 = a_2 \rightarrow \alpha_2 = \frac{a_2}{R}$

(v) $T_4 - m_3 g = m_3 a_3$

(השלם את המשוואות שוב

(i) $T_1 = m_1 a_1 + m_1 g$

(ii) $T_2 = T_1 + \frac{I}{R}\alpha_1$

(iii) $T_3 = T_2 + m_2 a_2$

(iv) $T_4 = T_3 + \frac{I}{R}\alpha_2$

(v) $T_4 = m_3 a_3 + m_3 g$

נעזר בכך שהחוטים לא נמתחים ולכן :

$|a_1| = |a_2| = -|a_3|$

נציב את השוויון של T מ-(v) ל-(iv) ונציב את (iii) בתוך (iv) וכך גם את (ii) ו-(i) :

$m_3 a_3 + a_3 g = \frac{I}{R}\alpha_2 + m_2 a_2 + \frac{I}{R}\alpha_1 + m_1 a_1 + m_1 g$

נציב את התאוצות הזוויתיות והקוויות לפי a_1 :

$m_3(-a_1) + m_3 g = \frac{I}{R}a_1 + m_2 a_1 + \frac{I}{R}a_1 + m_1 a_1 + m_1 g$

$(m_3 - m_1) g = \left(2\frac{I}{R} + m_1 + m_2 + m_3\right) a_1$

$$\boxed{a_1 = \frac{(m_3 - m_1)g}{m_1 + m_2 + m_3 + 2\frac{km R^2}{R^2}} = \frac{(m_3 - m_1)g}{m_1 + m_2 + m_3 + 2km}} = a_2 = -a_3$$

(III)

נציב בחזרה ב-(i) כדי לקבל את T_1:

$$T_1 = m_1 a_1 + m_1 g = m_1 (a_1 + g) = m_1 \left(\frac{(m_3 - m_1) g}{m_1 + m_2 + m_3 + 2km} + g \right) = m_1 g \left(\frac{m_3 \cancel{- m_1} \cancel{+ m_1} + m_2 + m_3 + 2km}{m_1 + m_2 + m_3 + 2km} \right)$$

$$\boxed{T_1 = m_1 g \left(\frac{m_2 + 2m_3 + 2km}{m_1 + m_2 + m_3 + 2km} \right)}$$

משוואה (ii)

$$T_2 = T_1 + \frac{I}{R} \alpha_2 = T_1 + \frac{I}{R^2} a_1 = T_1 + \frac{kmR^2}{R^2} a_1 = T_1 + km a_1 =$$

$$= m_1 g \frac{m_2 + 2m_3 + 2km}{m_1 + m_2 + m_3 + 2km} + km \frac{(m_3 - m_1) g}{m_1 + m_2 + m_3 + 2km} = g \left(\frac{m_1 m_2 + 2m_3 m_1 + \cancel{2} km m_1 + km m_3 - \cancel{km m_1}}{m_1 + m_2 + m_3 + 2km} \right)$$

$$\boxed{T_2 = g \frac{m_1 (m_2 + 2m_3) + km (m_1 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3 + 2km}}$$

משוואה (iii)

$$T_3 = T_2 + m_2 a_2 = T_2 + m_2 a_1 = g \frac{m_1 (m_2 + 2m_3) + km (m_1 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3 + 2km} + \frac{m_2 (m_3 - m_1) g}{m_1 + m_2 + m_3 + 2km} =$$

$$= g \left(\frac{\cancel{m_1 m_2} + 2m_1 m_3 + km (m_1 + m_3) + m_2 m_3 - \cancel{m_2 m_1}}{m_1 + m_2 + m_3 + 2km} \right) = \boxed{g \left(\frac{m_3 (m_2 + 2m_1) + km (m_1 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3 + 2km} \right)}$$

$$T_4 = m_3 a_3 + m_3 g = m_3 (-a_1 + g) = m_3 \left(\frac{-(m_3 - m_1) g}{m_1 + m_2 + m_3 + 2km} + g \right) = m_3 g \left(\frac{\cancel{-m_3} + m_1 + m_1 + m_2 \cancel{+ m_3} + 2km}{m_1 + m_2 + m_3 + 2km} \right) =$$

$$\boxed{= m_3 g \left(\frac{2m_1 + m_2 + 2km}{m_1 + m_2 + m_3 + 2km} \right)}$$

(IV)

4) מאחר ואין כוחות חיצוניים ניתן לומר כי קיים שימור תנע זוויתי לפני ואחרי ההצמדה:

$$\vec{L} = I_1\omega_0$$
$$\vec{L} = (I_1+I_2)\omega$$
$$\rightarrow \boxed{\omega = \frac{I_1}{I_1+I_2}\omega_0}$$

לפני $E = \frac{1}{2}I_1\omega_0^2$

אחרי $E = \frac{1}{2}I_1\omega^2 + \frac{1}{2}I_2\omega^2$

הפרש האנרגיה הינו:

$$\Delta E = \frac{1}{2}I_1\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2}I_1\omega^2 + \frac{1}{2}I_2\omega^2\right) = \frac{1}{2}I_1\omega_0^2 - \frac{1}{2}(I_1+I_2)\omega^2 =$$
$$= \frac{1}{2}I_1\omega_0^2 - \frac{1}{2}\cancel{(I_1+I_2)}\frac{I_1^2}{(I_1+I_2)^{\cancel{2}}}\omega_0^2 = \frac{1}{2}I_1\omega_0^2 - \frac{1}{2}I_1\left(\frac{I_1}{I_1+I_2}\right)\omega_0^2 =$$
$$= \frac{1}{2}I_1\omega_0^2\left(1-\frac{I_1}{I_1+I_2}\right) = \frac{1}{2}I_1\omega_0^2\left(\frac{\cancel{I_1}+I_2-\cancel{I_1}}{I_1+I_2}\right) =$$
$$\boxed{\frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{1}{2}I_1\omega_0^2\left(\frac{I_2}{I_1+I_2}\right)}{\frac{1}{2}I_1\omega_0^2} = \frac{I_2}{I_1+I_2}}$$

נבחן את המקרים השונים:

$I_1 \gg I_2$: $\frac{\Delta E}{E} = \frac{I_2}{I_1+I_2} = \frac{\frac{I_2}{I_1}}{1+\frac{I_2}{I_1}} \rightarrow \frac{0}{1} = 0$; $\omega = \frac{I_1}{I_1+I_2}\omega_0 = \frac{1}{1+\frac{I_2}{I_1}}\omega_0 \rightarrow \omega_0$

$I_1 = I_2$: $\frac{\Delta E}{E} = \frac{I_2}{I_1+I_2} = \frac{1}{2}$; $\omega = \frac{I_1}{I_1+I_2}\omega_0 = \frac{1}{2}\omega_0$

$I_1 \ll I_2$: $\frac{\Delta E}{E} = \frac{I_2}{I_1+I_2} = \frac{1}{\frac{I_1}{I_2}+1} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$; $\omega = \frac{I_1}{I_1+I_2}\omega_0 = \frac{\frac{I_1}{I_2}}{\frac{I_1}{I_2}+1}\omega_0 \rightarrow \frac{0}{1}\omega_0 = 0$

5) א) תנע זוויתי לפני ההתנגשות הינו (כאשר $\vec{v} = v_0\hat{x}$ + $\vec{r} = a\hat{y}$; $\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$) $\boxed{\vec{L}_{לפני} = -amv_0\hat{z}}$

כאשר בעת ההתנגשות הכוחות שפועלים הינם ~~בציר~~ אפס והמומנט לציר הסיבוב לכן $\Sigma\tau = 0$

והתנע הזוויתי נשמר $\boxed{\vec{L}_{אחרי} = -amv_0\hat{z}}$

ב) תנע קווי לפני ההתנגשות הינו $P = mv_0\hat{x}$. תנע קווי אחרי ההתנגשות יכול להיות מוגדר על ידי המהירות הזוויתית: $P = m'(l'\omega')$, כאשר $r_{cm} = l'$ ואת ω' אפשר למצוא

$$|L| = |amv_0|$$
$$|L| = |I'\omega'|$$
$$I' = \frac{1}{3}Ml^2 + ma^2$$
$$\rightarrow \omega' = \frac{amv_0}{\frac{1}{3}Ml^2 + ma^2}$$

$$r_{CM} = \frac{\Sigma m_i r_i}{\Sigma m_i} = \frac{ma + \frac{1}{2}lM}{m+M}$$

והתנע הקווי הינו:

$$P = m'l'\omega' = \cancel{(m+M)}\left(\frac{ma+\frac{1}{2}lM}{\cancel{m+M}}\right)\frac{amv_0}{\frac{1}{3}Ml^2+ma^2}$$

$$P_{אחרי} = \frac{ma^2+\frac{1}{2}laM}{ma^2+\frac{1}{3}l^2M}mv_0$$

על מנת שיתקיים שימור תנע קווי

$P_{לפני} = mv_0$

$$\rightarrow mv_0 = mv_0\frac{ma^2+\frac{1}{2}laM}{ma^2+\frac{1}{3}l^2M} \rightarrow \cancel{ma^2} + \frac{1}{2}laM = \cancel{ma^2} + \frac{1}{3}l^2M$$
$$\frac{1}{2}a = \frac{1}{3}l \rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}l}$$

(V)

$E_K = \frac{1}{2} m v_0^2$

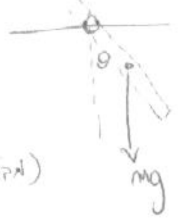
$E_K' = \frac{1}{2} I' \omega'^2$

$$\Delta E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2 + ma^2\right)\left(\frac{m a v_0}{\frac{1}{3}Ml^2+ma^2}\right)^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Ml^2+ma^2\right)\frac{m^2a^2v_0^2}{\left(\frac{1}{3}Ml^2+ma^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 \left(1 - \frac{ma^2}{\frac{1}{3}Ml^2+ma^2}\right) = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(\frac{\frac{1}{3}Ml^2 + \cancel{ma^2} - \cancel{ma^2}}{\frac{1}{3}Ml^2+ma^2}\right) = \frac{1}{2} m v_0^2 \frac{\frac{1}{3}Ml^2}{\frac{1}{3}Ml^2+ma^2} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} m v_0^2 \left(\frac{Ml^2}{Ml^2+3ma^2}\right)}$$

6) ניתן להסתכל על סכום המומנטים סביב ציר העובר במקביל לצלע (העליונה) שאורכה a.



(מבט צד)

$$\sum \tau = -\left|\frac{b}{2}\right| |mg| \sin\theta = I\alpha = I\ddot{\theta}$$

$$I\ddot{\theta} + \frac{b}{2} mg \sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{2}\frac{mg}{I}\sin\theta = 0$$

עבור זוויות קטנות $\sin\theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{2}\frac{mg}{I}\theta = 0$$

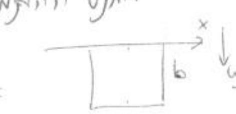
$$\ddot{\theta} + \frac{\cancel{b}}{2}\frac{\cancel{m}g}{\frac{1}{3}\cancel{m}b^{\cancel{2}}}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{3}{2}\frac{g}{b}}_{\omega_0^2}\theta = 0$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2b}{3g}}}$$

מומנט ההתמד של הלוח הינו

$$I = \iint y^2 \sigma \, dx\, dy =$$



$$= \sigma \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_0^b y^2 \, dy\, dx = \sigma a \int_0^b y^2 \, dy =$$

$$= \sigma a \frac{1}{3} b^3 = \frac{1}{3} \cancel{a} b^{\cancel{3}\,2} \frac{m}{\cancel{ab}} = \frac{1}{3} m b^2$$