שיעור 2

פונקציה זוגית\אי זוגית

נאמר ש $f(x)$ היא פונקציה זוגית אם לכל $x \in \mathbb{R}$ ($\in$ - שייך) $f(x) = f(-x)$.

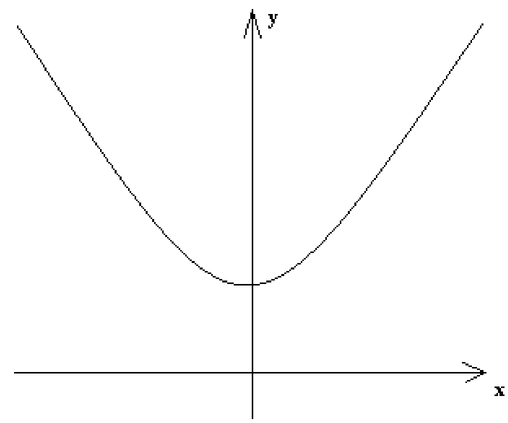
נאמר ש $f(x)$ היא פונקציה אי זוגית אם לכל $x \in \mathbb{R}$ $-f(x) = f(-x)$.

משמעות גיאומטרית

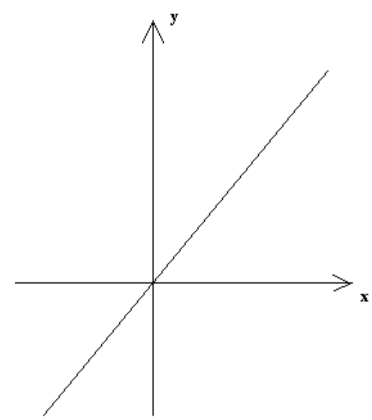
פונקציה זוגית סימטרית ביחס לציר y ופונקציה אי זוגית סימטרית ביחס לראשית הצירים.

דוגמאות

1. $f(x) = 2x^2 + 3$ היא פונקציה זוגית.



2. $f(x) = x$ היא פונקציה אי זוגית.



3. $f(x) = (x+1)^2$ לא זוגית ולא אי זוגית.
4. $f(x) = 0$ זוגית ואי זוגית.

הערה

כל פונקציה ניתן לרשום כסכום של פונקציה זוגית ואי זוגית באופן הבא:

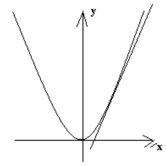
$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

גבולות חשובים - $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

<u>הגדרת הנגזרת</u>

מטרה – חישוב שיפוע המשיק לפונקציה $f\left(x\right)$ בנקודה x_0.

נרצה לחשב את שיפוע המשיק לפונקציה $f\left(x\right)=x^2$ בנקודה $x=2$.



המשיק עובר בנקודה $\left(2,4\right)$. לא ניתן לחשב את שיפוע הישר בעזרת נקודה אחת בלבד.

ניקח נקודה שנמצאת על הפונקציה נניח $\left(3,9\right)$ נחשב את השיפוע ונקבל $m=5$.

ככל שניקח נקודה קרובה יותר לנקודה $\left(2,4\right)$ נקבל שיפוע יותר קרוב לשיפוע המשיק.

נרשום את התוצאות בטבלה.

$2.01=2+0.01$	$2.1=2+0.1$	$2.5=2+0.5$	$3=2+1$	x
$\left(2+0.01\right)^2$	$\left(2+0.1\right)^2$	$\left(2+0.5\right)^2$	9	y
4.01	4.1	4.5	5	m

נשים לב שכאשר אנחנו לוקחים נקודה "קרובה" יותר לנקודה $\left(2,4\right)$ השיפוע מתקרב ל 4.

באופן כללי אם ניקח את הנקודה $\left(2+h,\left(2+h\right)^2\right)$ נקבל שהשיפוע הוא

$$m=\frac{\left(2+h\right)^2-2^2}{2+h-2}=\frac{\left(2+h\right)^2-2^2}{h}=\frac{4+4h+h^2-2^2}{2+h-2}=\frac{4h+h^2}{h}=4+h.$$

נשים לב שככל המרחק בין הנקודה שעל הפונקציה לנקודה הנתונה $\left(2,4\right)$ קרוב יותר לאפס (ז"א h קרוב לאפס) השיפוע קרוב יותר ל 4.

<u>הגדרת הנגזרת</u>

העיקרון של הגדרת הנגזרת מתבסס על הרעיון בחישוב שיפוע המשיק בדוגמא הקודמת.

$$f'\left(x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}.$$

<u>תרגיל</u>

חשב בעזרת הגדרת הנגזרת את הנגזרת של $f\left(x\right)=\sin x$.

<u>פתרון</u>

על פי הגדרת הנגזרת, שימוש בזהות $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ והגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$$f'\left(x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(x+h\right)-\sin\left(x\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cos\frac{x+h+x}{2}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h/2}=\cos x$$

<u>הפונקציות ההיפרבוליות</u>

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x},\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}$$

לפונקציות אלה יש תכונות דומות לאלה שי לפונקציות הטריגונומטריות הרגילות למשל:

א. $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$.

ב. $\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$.

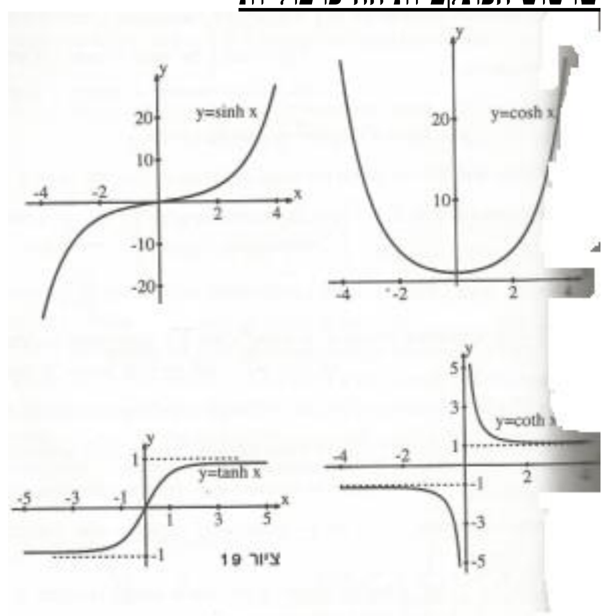
ג. $1-\tanh^2 x=\frac{1}{\cosh^2 x}$.

ד. $\cosh\left(x+y\right)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$.

ה. $\sinh\left(x+y\right)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y$.

ו. $\sinh x+\sinh y=2\sinh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

<u>שרטוט הפונקציות ההיפרבוליות</u>



<u>כלל השרשרת</u>

תהי $y=f\left(x\right)$ פונקציה גזירה בנקודה $x=x_0$, ותהי $z=g\left(y\right)$ פונקציה גזירה בנקודה $y=y_0$. אזי הפונקציה המורכבת $z=g\left(f\left(x\right)\right)$ גזירה בנקודה x_0 ומתקיים השוויון

$$z_x'=\left[g\left(f\left(x_0\right)\right)\right]'=g'(y_0)\cdot f'(x_0).$$

<u>דוגמא</u>

נגזור את הפונקציה $h\left(x\right)=\sin\left(x^2\right)$.

נסמן $y=f\left(x\right)=x^2$, $z=g\left(y\right)=\sin y$ נשים לב ש $h(x)=g\left(f\left(x\right)\right)$.

$$h'\left(x\right)=g'\left(y\right)\cdot f'\left(x\right)=\cos y\cdot 2x=\cos x^2\cdot 2x.$$

<u>כללי גזירה</u>

יהיו $f\left(x\right),g\left(x\right)$ פונקציות גזירות בנקודה x, ויהי c מספר קבוע. אזי

א. $\left(cf(x)\right)'=cf'(x)$.

ב. $\left(f(x)\pm g(x)\right)'=f'(x)\pm g'(x)$.

ג. $\left(f(x)g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

ד. אם $g(x)\neq 0$ אזי $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

<u>לתת בשיעור דוגמאות לנגזרות</u>

<u>נגזרת של פונקציה מהצורה</u> $y=f(x)^{g(x)}$ כאשר $f(x)>0$

אם $y=f(x)^{g(x)}$ אז $\ln y=\ln f(x)^{g(x)}\Leftarrow \ln y=g(x)\ln f(x)$

נגזור את שני האגפים ונקבל

$\frac{y'}{y}=\left(g(x)\ln f(x)\right)'$.

<u>דוגמא</u>

נחשב את הנגזרת של $y=x^{\sin x}$ כאשר $0<x$.

לפי החישוב הקודם נקבל ש $\frac{y'}{y}=(\sin x\ln x)'\Rightarrow y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$.

<u>נגזרות חד צדדיות</u>

<u>הגדרה</u>

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית מסוימת של הנקודה $x=x_0$.

הגבול $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, אם הוא קיים, נקרא הימנית של $f(x)$ בנקודה x_0, היא מסומנת ע"י $f'_+(x_0)$. באופן דומה נגדיר נגזרת שמאלית בנקודה x_0 ונסמנה ע"י $f'_-(x_0)$.

<u>תרגיל 1</u>

חשב את הנגזרות החד-צדדיות של הפונקציה $f(x)=|x|$ בנקודה $x=0$.

<u>פתרון</u>

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|-0}{h}=1$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|-0}{h}=-1$$

<u>תרגיל 2</u>

חשב את הנגזרות החד-צדדיות של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x^2-2 & x\geq 1\\ 3x-4 & x<1\end{cases}$ בנקודה $x=1$.

<u>פתרון</u>

על פי הגדרת הפונקציה, אם $h>0$ אזי $f(1+h)=(1+h)^2-2$, ואם $h<0$ אזי $f(1+h)=3(1+h)-4$.

$$f'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)^2-2-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1+2h+h^2-2+1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h+h^2}{h}=2$$

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3(1+h)-4-(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3+3h-4+1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{3h}{h}=3 \; .$$

<u>משפט</u>

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה x_0. אזי $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 אם ורק אם קיימות הנגזרות החד-צדדיות בנקודה x_0 והן שוות.

אם קיימת הנגזרת או אם קיימות הנגזרות החד-צדדיות והן שוות אז יתקיים השוויון $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

<u>דוגמא</u>

הפונקציות בתרגילים 1,2 לא גזירות.

<u>תרגיל 3</u>

הוכח כי הפונקציה $f(x)=\begin{cases}6x+9 & x\ge 2\\ 15+\frac{3x^2}{2} & x<2\end{cases}$ גזירה בנקודה $x=2$.

<u>פתרון</u>

תחילה נשים לב שהפונקציה רציפה בנקודה $x=2$ מכיוון ש $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=21$.

נשים לב ש $f'_+(2)=f'_-(2)=6$. לכן מן המשפט הקודם הפונקציה גזירה בנקודה $x=2$ ומתקיים $f'(2)=6$.

<u>משפט ערך הביניים</u>

תהא f רציפה ב $[a,b]$, ונניח ש $f(a)<0, f(b)>0$ (או להפך) אז קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $f(c)=0$.

<u>תרגיל</u>

תהיינה $f,g:[a,b]\to[a,b]$ פונקציות רציפות. הוכח כי אם g היא על, אז קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש $f(c)=g(c)$.

<u>פתרון</u>

נגדיר את הפונקציה $h(x)=g(x)-f(x)$. נתון כי f,g הן פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ ולכן גם h רציפה בקטע $[a,b]$. (הפרש של פונקציות רציפות).

נתון כי g היא על $[a,b]$ ולכן קיים $x_a\in[a,b]$ כך ש $g(x_a)=a$.

נתון כי g היא על $[a,b]$ ולכן קיים $x_b\in[a,b]$ כך ש $g(x_b)=b$.

נניח ב.ה.ג.כ. ש $x_a<x_b$. מכאן ש

$h(x_a)=g(x_a)-f(x_a)=a-f(x_a)\le 0$.

$h(x_b)=g(x_b)-f(x_b)=b-f(x_b)\ge 0$.

h פונקציה רציפה עבור $\left[a,b\right]$ ובפרט רציפה עבור $\left[x_a,x_b\right]$ ולכן על פי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $x_a \le c \le x_b$ כך ש $h\left(c\right)=0$.

משפט פרמה

תהיי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בקטע הפתוח $\left(a,b\right)$ וגזירה בנקודה פנימית x_0. אם $f\left(x\right)$ מקבלת בנקודה x_0 את ערכה הגדול ביותר או את ערכה הקטן ביותר אזי $f'\left(x_0\right)=0$.

הערה

שימו לב לחשיבות הדרישה ש $f\left(x\right)$ תהייה גזירה.

הפונקציה $f\left(x\right)=\left|x^2-3x+2\right|$ מקבלת ערך מינימאלי כאשר $x=1$.

הנגזרת לא קיימת במקרה זה.

משפט רול

תהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בקטע הסגור $\left[a,b\right]$ המקיימת את התנאים הבאים:

א. $f\left(x\right)$ רציפה בקטע $\left[a,b\right]$.

ב. $f\left(x\right)$ גזירה בקטע הפתוח $\left(a,b\right)$.

ג. $f\left(a\right)=f\left(b\right)$.

אזי קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $f'\left(c\right)=0$.

תרגיל

כמה פתרונות יש למשוואה $x^5-5x^4+5x^3+10=0$.

פתרון

נתבונן בפונקציה $f\left(x\right)=x^5-5x^4+5x^3+10$.

$f'\left(x\right)=5x^4-20x^3+15x^2=5x^2\left(x^2-4x+3\right)=5x^2\left(x-3\right)\left(x-1\right)$.

הנקודות שהנגזרת מתאפסת הם $0,1,3$.

ממשפט רול נקבל שבכל אחד מהקטעים $\left(\infty,0\right],\left[0,1\right],\left[1,3\right],\left[3,\infty\right)$ יש לכל היותר פתרון אחד.

על פי משפט ערך הביניים נוכל לדעת האם יש פתרון בכל אחד מהקטעים הנ"ל.

נתבונן בקטע $\left(-\infty,0\right]$

$f\left(0\right)=10,\ f\left(-10\right)<0$ ולכן יש פתרון אחד בקטע $\left(-\infty,0\right]$.

נתבונן בקטע $\left[0,1\right]$

$f\left(0\right)=1,\ f\left(1\right)=11$ ולכן אין פתרון בקטע $\left[0,1\right]$.

נתבונן בקטע $\left[1,3\right]$

$f\left(1\right)=11,\ f\left(3\right)=-17$ ולכן יש פתרון אחד בקטע $\left[1,3\right]$.

נתבונן בקטע $\left[3,\infty\right)$

$f\left(3\right)=-17,\ f\left(10\right)>0$ ולכן יש פתרון אחד בקטע $\left[3,\infty\right)$.

סה"כ נקבל שלושה פתרונות למשוואה.

תרגיל (בתרגיל בית)

כמה פתרונות יש למשוואה $x\sin x+\cos x=x^2$ בקטע $\left[0,\infty\right)$.

פתרון

יש לבדוק כמה פתרונות יש למשוואה $x\sin x+\cos x-x^2=0$ בקטע $[0,\infty)$.

נתבונן בפונקציה $f(x)=x\sin x+\cos x-x^2$.

$f'(x)=x\sin x+\cos x-x^2=\sin x+x\cos x-\sin x-2x=x\cos x-2x=x(\cos x-2)$.

מכיוון שפונקצית הנגזרת מתאפסת רק בנקודה $x=0$ נקבל ממשפט רול שיש לכל היותר פתרון אחד למשוואה $f(x)=x\sin x+\cos x-x^2$ בקטע $[0,\infty)$.

$f(0)=1$, $f(10)=10\cdot\sin 10+\cos 10-100<-81$ וזאת מכיוון ש $|\sin x|<1,|\cos x|<1$.

לפי משפט ערך הביניים נקבל שיש לפחות פתרון אחד בקטע $[0,10]$ ואז יש לפחות פתרון אחד בקטע $[0,\infty)$.

סה"כ קיבלנו שיש לפחות פתרון אחד ולכל היותר פתרון אחד בקטע $[0,\infty)$ ז"א יש בדיוק פתרון אחד בקטע $[0,\infty)$.

<u>משפט הערך הממוצע של לגראנז</u>

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ וגזירה בקטע הפתוח (a,b).

אזי קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

<u>תרגיל</u>

מצא נקודת/נקודות לגרנז' של הפונקציה $f(x)=x^3-x^2-14x+24$ בקטע $[-5,5]$.

<u>פתרון</u>

$f'(x)=3x^2-2x-14$ יש למצוא נקודה c כך ש $f'(c)=\dfrac{f(5)-f(-5)}{5-(-5)}=\dfrac{54-(-56)}{10}=11$

ז"א $3x^2-2x-14=11\Rightarrow 3x^2-2x-25=0\Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{304}}{6}$

וקיבלנו את נקודות לגראנז'.

<u>תרגיל</u>

מצא נקודת לגרנז' c של הפונקציה $f(x)=x^4$ ב $[1,3]$.

<u>פתרון</u>

$f'(x)=4x^3$ יש למצוא נקודה c כך ש $f'(c)=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{81-1}{2}=40$.

$4x^3=40 \Leftarrow x^3=10 \Leftarrow x=\sqrt[3]{10}$.

<u>פונקציה מונוטונית</u>

<u>הגדרה</u>

נאמר ש $f(x)$ מונוטונית עולה בתחום D, אם לכל $x_1,x_2\in D$ מתקיים $x_1\le x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$.

נאמר ש $f(x)$ מונוטונית יורדת בתחום D, אם לכל $x_1,x_2\in D$ מתקיים $x_1\le x_2\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$.

נאמר ש $f(x)$ מונוטונית עולה ממש בתחום D, אם לכל $x_1,x_2\in D$ מתקיים $x_1\le x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

נאמר ש $f(x)$ מונוטונית יורדת ממש בתחום D, אם לכל $x_1,x_2\in D$ מתקיים $x_1\le x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

דוגמא

הפונקציה $f\left(x\right)=\ln x$ עולה ממש בתחום $D=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x>0\right\}$.

נראה זאת לפי ההגדרה: יהיו $x_1,x_2\in D$ כך ש $x_1<x_2$ כעת $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=\ln\frac{x_2}{x_1}$ מכיוון ש

$0<x_1<x_2$ נקבל ש $\frac{x_2}{x_1}>1$ ולכן $f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=\ln\frac{x_2}{x_1}>0$ ואז הפונקציה $f\left(x\right)$ עולה ממש.

תרגיל

נתון שהפונקציות f,g עולות ממש ב $\mathbb{R}$ הוכח שהפונקציה $f\circ g$ גם עולה ממש.

פתרון

יהיו $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ כך ש $x_1<x_2$. $f\circ g\left(x_2\right)-f\circ g\left(x_1\right)=f\left(g\left(x_2\right)\right)-f\left(g\left(x_1\right)\right)$.

מכיוון ש g פונקציה עולה ממש ומכיוון ש $x_1<x_2$ נקבל ש $y_1:=g\left(x_1\right)<y_2:=g\left(x_2\right)$ ואז

$y_1,y_2\in\mathbb{R}$ כך ש $y_1<y_2$ ומכיוון ש f פונקציה עולה ממש נקבל ש

$f\circ g\left(x_2\right)-f\circ g\left(x_1\right)=f\left(g\left(x_2\right)\right)-f\left(g\left(x_1\right)\right)=f\left(y_2\right)-f\left(y_1\right)>0$ כדרוש.