תורת המשחקים – שיעור 3

שיווי משקל נאש ואסטרטגית מקסמין

חזרה על שיעור 2 – נקודות עיקריות

- הגדרנו מושגי שליטה של אסטרטגיות (שולטת חזק, שולטת חלש, נשלטת חזק, נשלטת חלש).
- ראינו (בהנחת ידיעה משותפת של רציונליות), ניתן לבצע מחיקה חוזרת של אסטרטגיות נשלטות (חלש או חזק).
- אם לאחר תהליך המחיקה הנ"ל נשאר רק וקטור אסטרטגיות יחיד (כלומר משבצת יחידה במטריצה) אזי ניתן להתייחס אליו כפתרון של המשחק.
- הוכחנו שסדר המחיקה של אסטרטגיות נשלטות חזק אינו רלוונטי.

סילוק של אסטרטגיות נשלטות חלש: דוגמה

שחקן 2

שחקן 1	L	C	R
T	1,2	2,3	0,3
M	2,2	2,1	3,2
B	2,1	0,0	1,0

סילוק של אסטרטגיות נשלטות חלש: סילוק בסדרה אחרת

שחקן 2

שחקן 1

	L	C	R
T	~~1,2~~	~~2,3~~	~~0,3~~
M	~~2,2~~	~~2,1~~	3,2
B	~~2,1~~	~~0,0~~	~~1,0~~

<u>מסקנה:</u> התוצאה המתקבלת ע"י סילוק אסטרטגיות נשלטות חלש תלויה בסדר הסילוק!

שיווי משקל נאש

- ג'ון נאש (זוכה פרס נובל לכלכלה) זיהה (ב 1950) סוג מיוחד של וקטורי אסטרטגיות הנקראים ***נקודות שיווי משקל***.
- בצורה לא פורמלית, ניתן לתאר נקודת שיווי משקל כוקטור אסטרטגיות שאין לאף שחקן בודד אינטרס לזוז ממנו.
- כלומר: בהנתן שכל שאר השחקנים פועלים לפי האסטרטגיות בשיווי המשקל, אם שחקן ייבחר באסטרטגיה אחרת הוא לא ירוויח מהמהלך.

הגדרות

- אם $x_{-i} \in S_{-i}$ הוא צירוף אסטרטגיות של כל השחקנים פרט לשחקן i, נאמר שהאסטרטגיה $y_i \in S_i$ היא ***תגובה מיטבית*** של שחקן i כנגד x_{-i} אם לכל אסטרטגיה אחרת $z_i \in S_i$ מתקיים

$$u_i(y_i, x_{-i}) \geq u_i(z_i, x_{-i})$$

- צירוף אסטרטגיות $x = (x_1, \ldots, x_n)$ נקרא ***שיווי משקל נאש*** אם לכל שחקן $i \in N$ מתקיים ש x_i היא התגובה המיטבית כנגד צירוף האסטרטגיות $x_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

מלחמת המינים

- גיא רוצה ללכת לסרט, אילנה רוצה ללכת לתיאטרון (סליחה על הסטריאוטיפים, אבל הדוגמה הזאת עתיקה).
- אבל הכי חשוב – הם רוצים להיות ביחד.
- אנחנו רואים שאם אילנה וגיא מסכימים על אחת משתי האפשרויות, לאף אחד מהם אין אינטרס להפר את "החוזה"

בדוגמא זו יש שני שיווי משקל נאש

		אילנה	
		סרט	תיאטרון
גיא	סרט	2,1	0,0
	תיאטרון	0,0	1,2

הערות

- אנחנו רואים שנקודת שיווי משקל נאש נהדרת להסכמים/חוזים. אין לאף שותף בהסכם אינטרס להפר את ההסכם.
- נקודת שיווי משקל נאש היא אנוכית (למרות שהיא כביכול "טובה" לכולם). כל שחקן דואג רק לעצמו ולא לטובת הכלל.
- יש סכנה שאם יש מספר גדול של שותפים להסכם ששניים או יותר מהם יתאמו ביניהם יחד הפרה של החוזה, וכך ייטיבו עם עצמם על חשבון האחרים.
- בדוגמה הבאה נראה שנקודת שיווי משקל נאש לא תמיד מייצגת תוצאות אופטימליות/"טובות".

דוגמה – דילמת האסיר

נחזור אל דוגמת דילמת האסיר, בה המשטרה מנסה לגרום לשני אסירים להלשין זה על זה. למטה נציג שוב את מטריצת התשלומים של השחקנים:

אסיר 2

אסיר 1		מלשין	שותק
	מלשין	1,1	5,0
	שותק	0,5	4,4

(זכרו שאלה התשלומים, ולא תוצאות המשחק!)

האם יש נקודת שיווי משקל במשחק?

אלגוריתם לחישוב שיווי משקל נאש

- נראה את האלגוריתם בעזרת דוגמה:

שחקן 2

שחקן 1	L	M	R
T	4,2	3,1	2,1
B	1,3	2,5	5,4

- לכל אסטרטגיה של שחקן 2, נמצא את האסטרטגיה המיטבית של שחקן 1
- לכל אסטרטגיה של שחקן 1, נמצא את האסטרטגיה המיטבית של שחקן 2
- במקרה ששתי אסטרטגיות מסומנות אזי זאת נקודת שיווי משקל

נפלאות התבונה?

- https://www.youtube.com/watch?v=ic2JRy1SYqA
- ג'ון נאש / ראסל קרואו מסביר לחבריו מהי נקודת שיווי משקל נאש.
- האם הוא מבין מהי נקודת שיווי משקל?
- נתחו את המשחק.
- חוקי המשחק: הבלונדינית שווה יותר מהברונטיות. כל בחורה לא מוכנה להיות "מותחלת" ע"י יותר מגבר אחד.
- נקודת שיווי משקל במשחק זה היא כאשר כל השחקנים מסכימים מראש שאחד מהם הולך לבלונדינית, וכל השאר הולכים לברונטיות, ולא כאשר כולם הולכים לברונטיות. מדוע?
- אולי בעצם נאש שמר את הבלונדינית לעצמו?

פתרון באסטרטגיות שולטות הוא שיווי משקל נאש

- **טענה:** נניח כי לכל שחקן $i \in N$ יש אסטרטגיה שולטת חלש $x_i \in S_i$. אזי וקטור האסטרטגיות $x = (x_1, \dots, x_n)$ הוא שיווי משקל נאש.
- **הוכחה:** לכל $y_i \in S_i$ ולכל צירוף אסטרטגיות $y_{-i} \in S_{-i}$ מתקיים $u_i(x_i, y_{-i}) \geq u_i(y_i, y_{-i})$.

בפרט מתקיים

$$u_i(x_i, x_{-i}) \geq u_i(y_i, x_{-i}).$$

לכן מתקיים ש x_i היא התגובה הטובה ביותר ל x_{-i}.

- **הערה:** ברור שהטענה מתקיימת גם עבור אסטרטגיות שולטות חזק, ובמקרה זה יש שיווי משקל יחיד במשחק (תרגיל בית).

תרגיל

- **הוכיחו או הפריכו:** נניח שכמו בטענה יש וקטור המורכב מאסטרטגיות שולטות חלש. אזי הוקטור הוא שיווי משקל נאש יחיד.

תרגיל

- **הוכיחו או הפריכו:** נניח שכמו בטענה יש וקטור המורכב מאסטרטגיות שולטות חלש. אזי הוקטור הוא שיווי משקל נאש יחיד.
- **נפריך:**

שחקן 2

שחקן 1		L	R
	T	0,0	1,1
	B	0,0	0,0

פתרון מחיקת אסטרטגיות נשלטות הוא שיווי משקל נאש

- **טענה:** אם לאחר מחיקת אסטרטגיות נשלטות חלש נשאר וקטור אסטרטגיות יחיד $x=(x_1,\dots,x_n)$ אזי הוא שיווי משקל נאש.
- **הוכחה:** נניח בשלילה ש x אינו שיווי משקל.

אזי קיים שחקן i כך שקיים $a_i \in S_i$ שהוא תגובה מיטבית ל x_{-i} וגם

$$u_i(a_i,x_{-i}) > u_i(x_i,x_{-i})$$

אבל a_i אסטרטגיה נשלטת חלש (בשלב מסויים במשחק) ולכן קיימת אסטרטגיה b_i כך ש $u_i(b_i,x_{-i}) \geq u_i(a_i,x_{-i})$.

אבל גם b_i נשלטת חלש, ולכן קיימת אסטרטגיה c_i כך ש...

כך ממשיכים עד שמגיעים חזרה לאסטרטגיה x_i ומקבלים סתירה.

עוד טענות לגבי שיווי משקל ומחיקה

- **טענה:** בתהליך מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק, לעולם לא נמחק שיווי משקל נאש (כלומר אסטרטגיה נשלטת חזק לא משתתפת בשיווי משקל נאש).
- **הוכחה:** תרגיל בית.
- **הוכיחו או הפריכו:** בתהליך מחיקת אסטרטגיות נשלטות חלש לעולם לא נמחק שיווי משקל נאש.

עוד טענות לגבי שיווי משקל ומחיקה

- **טענה:** בתהליך מחיקת אסטרטגיות נשלטות חזק, לעולם לא נמחק שיווי משקל נאש (כלומר אסטרטגיה נשלטת חזק לא משתתפת בשיווי משקל נאש).
- **הוכחה:** תרגיל בית.
- **הוכיחו או הפריכו:** בתהליך מחיקת אסטרטגיות נשלטות חלש לעולם לא נמחק שיווי משקל נאש.
- **נפריך:**

שחקן 2

		L	R
שחקן 1	T	0,0	1,1
	B	0,0	0,0

תרגיל

- **הוכיחו או הפריכו:** קיים משחק בו מחיקת אסטרטגיות נשלטות חלש מוחקת את כל שיווי משקל נאש.

תרגיל

- **הוכיחו או הפריכו:** קיים משחק בו מחיקת אסטרטגיות נשלטות חלש מוחקת את כל שיוויי משקל נאש.
- **נוכיח:**

שחקן 2

שחקן 1	L	C	R
T	1,1	0,1	0,0
M	1,0	2,1	1,2
B	0,0	1,1	2,0

דוגמה: חלוקת שלל

- שני פיראטים מגיעים אל רב-החובל שלהם עם ארבעה מטבעות זהב, כאשר כל אחד טוען שהשלל הוא שלו.
- רב-החובל קובע שכל אחד מהם צריך ללחוש לו כמה מטבעות מתוך השלל מגיעים לו.
- אם סכום הדרישות לא עולה על 4 אזי רב-החובל יחלק את השלל לפי הדרישות, ויישמור לעצמו את מה שנותר.
- אחרת, רב-החובל שומר לעצמו את כל השלל.
- האם יש למשחק "פתרון"?

פתרון

- נתחיל בשלב ציור המטריצה

פיראט 2

פיראט 1	0	1	2	3	4
0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
1	1,0	1,1	1,2	1,3	0,0
2	2,0	2,1	2,2	0,0	0,0
3	3,0	3,1	0,0	0,0	0,0
4	4,0	0,0	0,0	0,0	0,0

פתרון

- נסמן שיוויי משקל נאש

פיראט 2

פיראט 1		0	1	2	3	4
	0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
	1	1,0	1,1	1,2	1,3	0,0
	2	2,0	2,1	2,2	0,0	0,0
	3	3,0	3,1	0,0	0,0	0,0
	4	4,0	0,0	0,0	0,0	0,0

פתרון

- נמחק אסטרטגיות נשלטות חלש

פיראט 2

פיראט 1	0	1	2	3	4
0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4
1	1,0	1,1	1,2	1,3	0,0
2	2,0	2,1	2,2	0,0	0,0
3	3,0	3,1	0,0	0,0	0,0
4	4,0	0,0	0,0	0,0	0,0

פתרון

- נשארנו עם המשחק הבא:
- יש לנו שיווי משקל "טבעי" למשחק, שכן גם בלי הסכם מראש בין הפיראטים, כל אחד מהפיראטים יישתדל להמנע ממצב בו סכום הדרישות גבוה מ 4, יחד עם זאת הפתרון הוא הוגן כלפי שני הצדדים, ולכן "בולט" לעומת האחרים.

פיראט 2

פיראט 1	1	2	3
1	1,1	1,2	1,3
2	2,1	2,2	0,0
3	3,1	0,0	0,0

שיווי משקל מתבלט (focal point)

- שיווי משקל שהוא בולט יותר מאחרים נקרא **שיווי משקל מתבלט** (focal point) **Thomas Schelling**.
- דוגמא – שני אנשים מתבקשים לבחור משבצת אחת מבין שלושת המשבצות. אם שניהם בוחרים באותה המשבצת הם מנצחים.

- דוגמא – שני אנשים צריכים להיפגש במקום כלשהו בזמן כלשהו – 12:00 בדוכן המודיעין של התחנה המרכזית.