פתרון מבחן מועד א' – 86-147 חדו"א 1 לאודיסאה – 05/02/24

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

<u>יש לכתוב את התשובות על גבי טופס המבחן במקום המתאים בלבד. מותר לכתוב משני צידי הדף.</u>

<u>מחברות הטיוטה מושלכות ולא תבדקנה.</u>

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin^7(x))}{\sin^7(x)+\cos^7(x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin^7(x))}{\sin^7(x)+\cos^7(x)}=\frac{0}{1}=0$$

ב. $\lim_{x\to e}(\ln(x))^{\frac{1}{x-e}}$

$$\lim_{x\to e}(\ln(x))^{\frac{1}{x-e}}=\left\{1^{\frac{1}{0}}, e\text{ כלל ה}\right\}=e^{\lim_{x\to e}\frac{1}{x-e}(\ln(x)-1)}=e^{\frac{1}{e}}=\sqrt[e]{e}$$

כאשר הגבול במעריך החזקה הוא

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln(x)-1}{x-e}=\left\{\frac{0}{0}, L'Hopital\right\}=\lim_{x\to e}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{e}$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$

כאן נשתמש בכלל הסנדוויץ'

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+1}=n\cdot\frac{n}{n^2+1}=\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\to 1$$

ייתכן שבכתיב פחות מדוייק של "שלוש נקודות" זה יהיה קל יותר להבנה, ולכן ארשום כך

$$\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\le\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+1}=n\cdot\frac{n}{n^2+1}$$

מצד שני

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+n}=n\cdot\frac{n}{n^2+n}=\frac{n}{n+1}=\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\to 1$$

לפי כלל הסנדוויץ' הגבול הוא 1.

.2

א. חשבו את $\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx$.

$$\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx = \left\{\begin{matrix} t = \sqrt{x} \\ dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix}\right\} = \int te^t 2tdt = 2\int t^2e^tdt = \left\{\begin{matrix} f' = e^t & g = t^2 \\ f = e^t & g' = 2t \end{matrix}\right\} =$$

$$= 2\left[t^2e^t - \int 2te^tdt\right] = \left\{\begin{matrix} f' = e^t & g = 2t \\ f = e^t & g' = 2 \end{matrix}\right\} = 2\left[t^2e^t - \left[2te^t - \int 2e^tdt\right]\right] =$$

$$= 2t^2e^t - 4te^t + 4e^t + C = 2xe^{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + 4e^{\sqrt{x}} + C$$

ב. חשבו את $\int \frac{x^4-x^3+x^2+x+2}{(x^2-1)(x-1)}dx$.

מדובר באינטגרל על פונקציה רציונלית.

ראשית כיוון שדרגת המונה 4 גדולה או שווה לדרגת המכנה 3 נתחיל בחילוק פולינומים.

x

$x^4 - x^3 + x^2 + x + 2 | x^3 - x^2 - x + 1$

$x^4 - x^3 - x^2 + x$

$2x^2 + 2$

סה"כ קיבלנו כי

$$\frac{x^4 - x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2-1)(x-1)} = x + \frac{2x^2+2}{(x^2-1)(x-1)}$$

כעת נפרק את השבר לשברים חלקיים, אך ראשית נשים לב להטעייה – המכנה צריך להיות מסודר לפי הגורמים האי פריקים

$$(x^2-1)(x-1) = (x-1)(x+1)(x-1) = (x+1)(x-1)^2$$

$$\frac{2x^2+2}{(x^2-1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

נעשה מכנה משותף ונשווה מונים

$$2x^2 + 2 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)$$

נציב $x = -1$

$$4 = 4A$$

$$A = 1$$

נציב $x = 1$

$$4 = 2C$$

$$C = 2$$

נציב $x = 0$

$$2 = 1 - B + 2$$

$$B = 1$$

ומכאן

$$x + \frac{2x^2 + 2}{(x^2 - 1)(x - 1)} = x + \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)^2}$$

וכעת אנו מוכנים ומזומנים לאינטגרל

$$\int \frac{x^4 - x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2 - 1)(x - 1)} dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x + 1| + \ln|x - 1| - \frac{2}{x - 1} + C$$

.3

א. מצאו את הערך המקסימלי ואת הערך המינימלי של הפונקציה $f(x) = x^{-3} e^{-\left(\frac{1}{x^2}\right)}$.

ברור שצריך לחשב תחומי עלייה וירידה, ואת הערכים בקצוות תחומי העלייה והירידה.

וברור שאם הפונקציה אינה רציפה בקצה תחום העלייה או הירידה, צריך לחשב גבול.

$$f'(x) = -3x^{-4} e^{-x^{-2}} + x^{-3} e^{-x^{-2}} \cdot 2x^{-3} =$$

$$= e^{-x^{-2}} \left(-\frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^6} \right) = e^{-x^{-2}} \left(\frac{2 - 3x^2}{x^6} \right)$$

כל שמעניין אותנו הוא סימן הנגזרת, ומכיוון ש x^6, $e^{-x^{-2}}$ חיוביים נתעלם מהם

$$2 - 3x^2$$

זו פרבולה בוכה ששורשיה הם

$$\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

ולכן הנגזרת חיובית בין השורשים ושלילית בחוץ.

לא נשכח את העובדה שאפס היא נקודת אי רציפות, ומכאן תחומי העלייה והירידה הם כדלקמן:

$\left(-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ ירידה

$\left[-\sqrt{\frac{2}{3}},0\right)$ עלייה

$\left(0,\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ עלייה

$\left[\sqrt{\frac{2}{3}},\infty\right)$ ירידה

כעת צריך לבדוק מה קורה בקצה כל תחום עלייה או ירידה.

$$\lim_{x\to-\infty} x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} = 0\cdot e^0 = 0$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{-3} e^{-\frac{3}{2}} < 0$$

כרגע זה הערך הנמוך ביותר בפונקציה, כמובן לפני שבדקנו את ההמשך.

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} = \begin{Bmatrix} t = \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x} = \sqrt{t} \end{Bmatrix} = \lim_{t\to\infty}\sqrt{t^3}e^{-t} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{e^t} = 0$$

כאשר הגבול האחרון הוא בזכות סדרי גודל.

(ורואים שאפס היא נקודת אי רציפות סליקה.)

$$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{-3} e^{\frac{3}{2}} > 0$$

כרגע זה הערך הגדול ביותר בפונקציה, והערך המינימלי לא השתנה כי עלינו למעלה ובאפס הגבול הוא אפס.

כיוון שמעתה הפונקציה יורדת אז $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ הוא הערך המקסימלי הגלובאלי של הפונקציה.

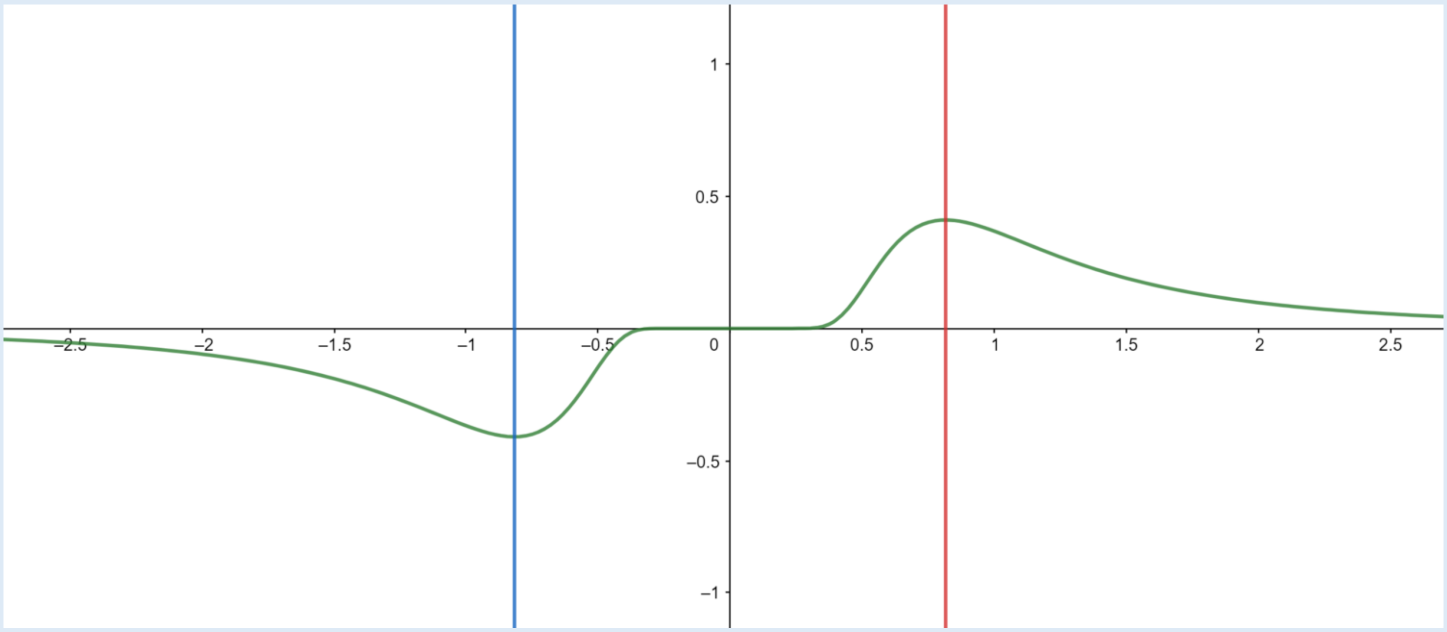
לבסוף

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} = 0e^0 = 0$$

ולכן הערך המינימלי של הפונקציה הוא הערך השלילי שכבר מצאנו

$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

שרטוט בשביל הלייקים:



ב. מצאו את החסם העליון והחסם התחתון של הפונקציה $g(x) = e^{-\left(\frac{1}{x^2}\right)}$. האם יש לה מקסימום או מינימום?

שוב נחקור, נגזור

$$g'(x) = e^{-x^{-2}}2x^{-3}$$

זה בדיוק פעמיים הפונקציה מהסעיף הקודם!

ראינו שהיא חיובית בחיוביים ושלילית בשליליים

כלומר פונקציה זו יורדת בשליליים ועולה בחיוביים, ונותר רק למצוא גבולות בקצות תחומי העלייה והירידה

הערה (בזכות אביב, לא צנזור): $\frac{1}{x^2}$ יורדת בחיוביים ולכן $e^{-\frac{1}{x^2}}$ עולה בחיוביים, ואפשר להראות ירידה בשליליים באופן דומה.

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \left\{e^{-\frac{1}{0^+}}\right\} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = e^0 = 1$$

הפונקציה מתחילה מ1 כביכול, יורדת לכיוון אפס, ואז עולה חזרה ל1.

החסם העליון הוא 1 והחסם התחתון הוא אפס, ואין מינימום או מקסימום.

(רצוי כנראה להוכיח את זה)

4. תהי f פונקציה כך ש לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f'(x) > 0$, ונביט בקבוצת ערכי ציר y המסומנת $I = \{f(x) | x \in \mathbb{R}\}$.

א. הוכיחו או הפריכו: I אינה חסומה מלעיל או שאינה חסומה מלרע.

נפריך, ניתן פונקציה עולה בה ערכי ציר y חסומים מלעיל וגם חסומים מלרע.

$$y = \arctan(x)$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

$$I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

ב. הוכיחו או הפריכו: לקבוצה I אין מקסימום.

תשובה חביבה: אם יש מקסימום, יש קיצון מקומי והנגזרת חייבת להתאפס בניגוד לנתונים.

תשובה שציפיתי לה: כיוון שהפונקציה עולה תמיד, לכל x מתקיים כי $f(x) < f(x+1)$ ולכן אין ערך מקסימום כי לכל ערך יש ערך גבוה ממנו אחריו.

5. תהי סדרה a_n המקיימת לכל n כי $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + \frac{3}{2}$, וכי $a_1 = 1$. נסמן את סדרת האיברים במקומות הזוגיים $b_n = a_{2n}$.

הקטע המרכזי כאן הוא לייצר נוסחת נסיגה עבור הסדרה b_n

$$b_{n+1} = a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \frac{1}{a_{2n+1}} + \frac{3}{2} = \frac{1}{\frac{1}{a_{2n}} + \frac{3}{2}} + \frac{3}{2} = \frac{1}{\frac{1}{b_n} + \frac{3}{2}} + \frac{3}{2}$$

האינטואיציה כאן היא לפשט, אבל דווקא המכנה המשותף ילך כנגדנו, לפעמים עצלנות היא כוח. (אבל רק לפעמים.)

א. הוכיחו כי b_n מונוטונית יורדת.

נוכיח באינדוקציה, נתחיל מהבדיקה:

$$b_1 = a_2 = \frac{1}{a_1} + \frac{3}{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$b_2 = \frac{1}{\frac{1}{b_1} + \frac{3}{2}} + \frac{3}{2} = \frac{1}{\frac{2}{5} + \frac{3}{2}} + \frac{3}{2} = \frac{1}{\frac{19}{10}} + \frac{3}{2} = \frac{10}{19} + \frac{3}{2} = \frac{20+57}{38} = \frac{77}{38}$$

והרי

$$\frac{5}{2}=\frac{95}{38}$$

אכן

$$b_2<b_1$$

כעת, יהי n עבורו $b_{n+1}\le b_n$ צריך להוכיח כי $b_{n+2}\le b_{n+1}$

צ"ל כי

$$\frac{1}{\frac{1}{b_{n+1}}+\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}\le\frac{1}{\frac{1}{b_n}+\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}$$

צ"ל

$$\frac{1}{\frac{1}{b_{n+1}}+\frac{3}{2}}\le\frac{1}{\frac{1}{b_n}+\frac{3}{2}}$$

אנחנו רוצים לעשות הופכי לשני האגפים ולהפוך את סימן אי השיוויון, אך לצורך כך צריך להוכיח כי הסדרה חיובית. נעשה זאת על הסדרה המלאה a_n באינדוקציה זריזה: $a_1>0$, אם $a_n>0$ אז $a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+\frac{3}{2}>0$

לכן צ"ל כי

$$\frac{1}{b_{n+1}}+\frac{3}{2}\ge\frac{1}{b_n}+\frac{3}{2}$$

צ"ל

$$\frac{1}{b_{n+1}}\ge\frac{1}{b_n}$$

שוב נהפוך וצ"ל לבסוף כי

$$b_{n+1}\le b_n$$

וזו הנחת האינדוקציה! *yeet*

ב. חשבו את גבול הסדרה b_n.

הראנו בסעיף קודם כי הסדרה יורדת וחסומה מלמטה ע"י אפס, ומכאן היא מתכנסת לגבול סופי שנסמנו

$$b_n\to L$$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה (של הסדרה הזו ולא המקורית)

$$\lim b_{n+1} = \lim \frac{1}{\frac{1}{b_n} + \frac{3}{2}} + \frac{3}{2}$$

$$L = \frac{1}{\frac{1}{L} + \frac{3}{2}} + \frac{3}{2}$$

הערה: לא ייתכן כי $L = 0$ כי אז מקבלים סתירה – מצד שמאל אפס, ומצד ימין הגבול יוצא $\frac{1}{\infty} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

נכפול את שני צידי המשוואה שקיבלנו ב$\left(\frac{1}{L} + \frac{3}{2}\right)$

$$1 + \frac{3}{2}L = 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{L} + \frac{9}{4}$$

$$\frac{3}{2}L = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{L} + \frac{9}{4}$$

$$L = \frac{1}{L} + \frac{3}{2}$$

$$L^2 = 1 + \frac{3}{2}L$$

$$L^2 - \frac{3}{2}L - 1 = 0$$

$$2L^2 - 3L - 2 = 0$$

$$L_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = -\frac{1}{2}, 2$$

כיוון שהסדרה חיובית, גבולה אי שלילי ולכן $L = 2$.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$$

זו סדרת סכומי רימן של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{1+x}$ שהיא רציפה ב$[0,1]$ ולפי המשפט מהכיתה

$$a_n \to \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\ln|x+1|]_0^1 = \ln(2)$$

ב. קרבו את $\sin\left(2 \cdot \frac{1}{3}\right)$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

נפתח פולינום טיילור של הפונקציה $f(x) = \sin(x)$ סביב נקודת ההשקה 0 ונציב את הנקודה הרצוייה $\frac{2}{3}$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(\frac{2}{3} - 0\right)^{n+1}$$

כיוון שהפונקציה היא $\sin(x)$ כל נגזרותיה הן $\pm\sin(x)$ או $\pm\cos(x)$ ולכן

$$\left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq 1$$

ולכן

$$|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

נציב $n = 4$

$$|R_4| \leq \frac{1}{5!}\left(\frac{2}{3}\right)^5 \leq \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} < \frac{1}{100}$$

יכלנו כנראה לבחור $n = 3$ אך למי בכלל אכפת.

פולינום הטיילור הוא

$$p(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

ולכן

$$\sin\left(\frac{2}{3}\right) \approx \frac{2}{3} - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{3!}$$