הדיפרנציאל השני

נניח שf מוגדרת בקבוצה פתוחה D ב$\mathbb{R}^k$(עם ערכים ב$\mathbb{R}$) ודיפרנציאבילית בכל הנקו-דות של D.

$$df\left(\right): x \in D^{\subset \mathbb{R}^k} \to df\left(x\right) \in \left(\mathbb{R}^k\right)' \leftrightarrow \mathbb{R}^k$$

$\left(\mathbb{R}^k\right)'$(הוא מרחב כל הפונקציונאלים הלינאריים על $\mathbb{R}^k$, נקרא המרחב הדואלי של $\mathbb{R}^k$, והוא איזומורפי($\leftrightarrow$) ל$\mathbb{R}^k$)
נוח לזהות את $\left(\mathbb{R}^k\right)'$ עם $\mathbb{R}^k$ בעזרת האיזומורפיזם:

$$L \in \left(\mathbb{R}^k\right)' \leftrightarrow a \in \mathbb{R}^k$$

$$Lh = ha \quad \forall h \in \mathbb{R}^k$$

$$\left(a_i \doteqdot Le^i\right)$$

$$ha = \sum_i h_i a_i = \sum_i h_i Le^i = L\left(\underbrace{\sum h_i e^0}_{h}\right) = Lh$$

לפי הזיהוי הנ"ל, $df\left(\right)$ הוא פונקציה וקטורית מ$D \subseteq \mathbb{R}^k$ ל$\mathbb{R}^k$. אם הפונקציה(הוקטורית) $df\left(\right)$ דיפרנציאבילית(בעצמה) בנק' מסוימת x של D, נקרא לדיפרנציאל שלה בנק' x הדיפרנציאל השני של f בנק. x(המסומן $\left.d^2 f\right|_x$)

$$\left.d\left(df\left(\right)\right)\right|_x \doteqdot \left.d^2 f\right|_x$$

$\left.d^2 f\right|_x$ היא העתקה לינארית מ$\mathbb{R}^k$ ל$\mathbb{R}^k$.
הוא קיים אמ"ס(משפט!) כל הרכיבים של $\nabla f\left(\right)$(שזוהה ע"י האיזומורפיזם הנ"ל עם $df\left(\right)$) הם דיפרנציאביליים בנק' x.
דהיינו, אמ"ם כל הנגזרות $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ דיפרנציאביליות בנק' x.
תנאי מספיק לכך הוא שהנגזרות החלקיות $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ קיימות בסביבה של x, ורציפות בנק' x(ודאי מתקיים אם f היא C^2 בD), ובמקרה זה $\left.d^2 f\right|_x$ קיים לכל $x \in D$

$$\left.d^2 f\right|_x h = d\left.\left(\underbrace{\begin{matrix}\nabla f\\ \updownarrow\end{matrix}}_{df\left(\right)}\right)\right|_x h = h\left(\frac{\partial\left(\nabla f\right)}{\partial x}\right) \doteqdot h\left(\frac{\partial\left(f_{x_1}, \ldots f_{x_k}\right)}{\partial\left(x_1, \ldots x_k\right)}\right)$$

$H=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ נקרא ההסיאן

$d^2f\big|_x$ היא העתקה לינארית מ$\mathbb{R}^k$ ל$\mathbb{R}^k$

$$u\in\mathbb{R}^k$$

$$\left(d^2f\big|_x h\right)u=hH|_x u^t=uHh^t$$

זו תבנית בילינארית(דהיינו: פונקציה ממשית של שני וקטורים ב$\mathbb{R}^k$, שהיא לינארית בכל אחד מהם).

משפט הפונקציות הסתומות

$$f:D\subseteq\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

נניח שבנקודה מסויימת $f\left(x^0,y^0\right)$.

בעיה: פתרון המשוואה $f(x,y)=0$ עבור y(כפונקציה של x) בסביבה מסויימת של הנק' $\left(x^0,y^0\right)$

דוגמה $x^2+y^2=r^2$, $r>0$ נתון. $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ - אבל אנחנו רוצים פתרון יחיד לy! אנחנו רוצים לחפש פתרון מקומי.

נקודות שבת(כלי רב שימושי באנליזה)

הגדרה

- יהי (X,d) מרחב מטרי. העתקה $T:X\to X$ נקראת כיווץ(contraction) אם קיים $0<q<1$ כך ש$\forall x,y\in X\ d(Tx,Ty)\le qd(x,y)$

כיווץ הוא בהכרח רציף(במ"ש) על X, כי אם $\epsilon>0$ נתון, נבחר $\delta=\epsilon$, ואז לכל $x,y\in X$ שעבורם $d(x,y)<\delta$ מתקיים $d(Tx,Ty)\le qd(x,y)<q\delta<\epsilon$

- נק' $x\in X$ נקראת נקודת שבת של T אם $Tx=x$

אם קיימת נק' שבת x לכיווץ T, היא בהכרח יחידה כי אם x,x' שתיהן נקודות שבת של T,

$$d(x,x')=d(Tx,Tx')\le qd(x,x')\Rightarrow 0\le(1-q)\,d(x,x')\le 0\Rightarrow d(x,x')=0\Rightarrow x=x'$$

משפט נקודת השבת של בנך(Banch)

יהי X מרחב מטרי שלם, ויהי T כיווץ של X. אזי יש לT נקודת שבת יחידה בX

הוכחה(קיום! יחידות כבר ראינו!)

נגדיר באופן אינדוקטיבי את T^n: לכל n $T^{n+1}=T\circ T^n$. T^0 - הזהות
תהי x_0 נק' שרירותית של X, ונגדיר סדרה

$$x_n=T^nx_0 \quad n=0,1,2,...$$

דהיינו

$$\left\{x_0,Tx_0,T^2x_0,...\right\}$$

טענה $d\left(x_n,x_{n+1}\right)\leq q^nd\left(x_0,x_1\right)$ **לכל** $n\geq 0$

הוכחה באינדוקציה על n:
$n=0$: טריויאלי
נניח נכונות אי השוויון עבור n ונוכיח עבור $n+1$:

$$d\left(x_{n+1},x_{n+2}\right)=d\left(Tx_n,Tx_{n+1}\right)$$

בגלל שזה כיווץ:

$$\leq qd\left(x_n,x_{n+1}\right)$$

ולפי הנחת האינדוקציה

$$\leq vqq^nd\left(x_0,x_1\right)=q^{n+1}d\left(x_0,x_1\right)$$

טענה (חיזוק הטענה הקודמת):
לכל $m>n$, $d\left(x_n,x_m\right)\leq\left(q^n+...+q^{m-1}\right)d\left(x_0,x_1\right)$

הוכחה באינדוקציה על m(עבור n נתון כלשהו).
אינדוקציה המתחילה ב$m=n+1$, עבור $m=n+1$ זה נכון לפי ההגדרה של $\{x_n\}$.
נניח לm מסוים, ונוכיח עבור $m+1$:
לפי אי שוויון המשולש

$$d\left(x_n,x_{m+1}\right)\leq d\left(x_n,x_m\right)+d\left(x_m,x_{m+1}\right)$$

לפי הנחת האינדוקציה

$$\leq\left(q^n+...+q^{m-1}\right)d\left(x_0,x_1\right)+q^md\left(x_0,x_1\right)=\left(q^n+...+q^{m-1},q^m\right)d\left(x_0,x_1\right)$$

משל טענת עזר

מהטענות הנ"ל קיבלנו

$$0\leq d\left(x_n,x_m\right)\leq\left(q^n+q^{n+1}+...\right)d\left(x_0,x_1\right)=q^n\left(1+q+...\right)d\left(x_0,x_1\right)$$

$$= \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(כי $q < 1$)
על כן:

$$d(x_n, x_m) \xrightarrow[m>n]{} 0$$

ז"א $\{x_n\}$ סדרת קושי ב-x, וכיוון ש-X שלם, קיים הגבול $x \doteqdot \lim_{n\to\infty} x_n \in X$

טענה x נק' שבת של T

$$Tx = T\left(\lim_n x_n\right)$$

ובגלל הרציפות של הכיווץ T:

$$= \lim_n Tx_n = \lim_n X_{n+1} = x$$

מש"ל

הערה

המרחב המטרי חייב להיות שלם, אחרת לא בהכרח $\lim_{n\to\infty} x_n \in X$

מהו המרחב המטרי שבו יופעל משפט בנך?

יהי Z מרחב מטרי קומפקטי כלשהו. $C(Z)$ יסמן את מרחב כל הפונקציות הממשיות הרציפות ועל Z
$f \in C(Z) \Leftarrow |f|$ רציפה על Z ולכן חסומה על המרחב הקופמפקטי Z

$$\sup_Z |f| < \infty$$

(זה מקסימום!)
נגדיר $\boxed{\|f\| \doteqdot \sup_Z |f|}$ - זו באמת נורמה על $C(Z)$.
Z הוא מרחב נורמי על(מעל $\mathbb{R}$)

משפט

$C(Z)$ הוא מרחב בנך(כלומר: מ"נ שלם)

הוכחה

תהי $\{f_n\}$ סדרת קושי ב$C(Z)$. צל"ה: שקיים $f \in C(Z)$ כך ש$\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

קושי: אם $\epsilon > 0$ נתון, קיים $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ כך ש$\|f_n - f_m\|$ לכל $m, n > n(\epsilon)$

תהי $x \in Z$(שרירותית).

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sum_{x\in Z} |f_n(x) - f_m(x)| \doteqdot \|f_n - f_m\|$$

לכל $n, m > n(\epsilon)$. ז"א $\{f_n(x)\}$סדרת קושי ב$\mathbb{R}$. כיוון ש$\mathbb{R}$ שלם, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.
נגדיר $f(x) \doteqdot \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$(לכל $x \in Z$)
<u>נראה ש$f \in C(Z)$</u>

ל$\epsilon > 0$ נתון שרירותי, עבור $m > n > n\left(\frac{\epsilon}{3}\right)$ מתקיים $\|f_n - f_m\| < \frac{\epsilon}{3}$ ולכן

$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ <u>לכל $x \in Z$</u>.

נשלח $m \to \infty$(עבור n נתון כלשהו הגדול מ$n\left(\frac{\epsilon}{3}\right)$) נקבל:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n > n\left(\frac{\epsilon}{3}\right) \quad \forall x \in Z$$

תהיינה $x, y \in Z$ כלשהן.

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

לכל $n > n\left(\frac{\epsilon}{3}\right)$, המחובר הראשון והשלישי קטנים או שווים $\frac{\epsilon}{3}$.

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{2\epsilon}{3} + |f_n(x) - f_n(y)|$$

נקבע n כנ"ל. כיוון שf_n רציפה על Z(במ"ש, כי Z קומפקטי) קיים $\delta > 0$ כך ש$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3}$ לכל x, y בZכך ש$d(x,y) < \delta$