# תרגיל בית 4 במבנים אלגבריים
# 89-214 סמסטר א' תשפ"ג

**שאלה 1** (חימום)**.** יהיו $f\colon G \to H$ ו-$g\colon H \to K$ הומומורפיזמים של חבורות. הוכיחו שההרכבה $g \circ f\colon G \to K$ היא גם הומומורפיזם.

**שאלה 2.** תהינה $G, H$ חבורות ויהי $f\colon G \to H$ הומומורפיזם. הוכיחו כי $f$ חח"ע אם ורק אם $\ker f = \{e_G\}$.

**שאלה 3** (חזרה)**.** תהי $G$ חבורה, ויהיו $a, b \in G$ איברים מסדר סופי.
הוכיחו שאם $a$ ו-$b$ מתחלפים, אז $ab$ הוא מסדר סופי. הפריכו זאת כאשר הם לא מתחלפים.

**שאלה 4.** לכל תמורה $\sigma$ מהתמורות הבאות, כתבו את $\sigma$ כמכפלת מחזורים זרים וחשבו את $\sigma^2$, את $\sigma^{10}$ ואת $o(\sigma)$.

א. $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in S_7$$

ב. $\sigma = (3\ 1\ 2)\,(1\ 4\ 5)\,(2\ 3)\,(4\ 3\ 5) \in S_5$

ג. $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2^2 \in S_4$, כאשר $\tau_1 = (2\ 3\ 4)$ ו-$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

**שאלה 5.** תהי $\sigma \in S_n$ תמורה, ונגדיר את התומך של $\sigma$ להיות

$$\mathrm{supp}(\sigma) = \{i \,|\, \sigma(i) \neq i\}$$

במילים אחרות, אלו הם המספרים ש-$\sigma$ "מזיזה". נאמר ששתי תמורות $\sigma$ ו-$\tau$ הן זרות אם $\mathrm{supp}(\sigma) \cap \mathrm{supp}(\tau) = \varnothing$.

א. תנו דוגמה לתמורות לא זרות שאינן מתחלפות.

ב. תנו דוגמה לתמורות לא זרות שמתחלפות.

ג. הוכיחו שאם $i \in \mathrm{supp}(\sigma)$, אז גם $\sigma(i) \in \mathrm{supp}(\sigma)$.

ד. הוכיחו שכל זוג תמורות זרות מתחלף.

**שאלה 6.** תהיינה $G, H$ חבורות. האם כל תת־חבורה $K$ של $G \times H$ היא בהכרח מהצורה $K_1 \times K_2$, כאשר $K_1$ תת־חבורה של $G$ ו-$K_2$ תת־חבורה של $H$? הוכיחו או תנו דוגמה נגדית.

**שאלה 7.** עבור כל אחת מן ההעתקות הבאות קבעו והוכיחו האם היא מוגדרת היטב, הומומורפיזם, מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

א. $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{10}$ המוגדרת לפי $f(n) = (n \bmod 10,\, n \bmod 10)$.

ב. $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ המוגדרת לפי $f(\frac{a}{b}) = (a, b)$.

ג. $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ המוגדרת לפי $f(x) = x^4$.

ד. $f\colon S_5 \times S_5 \to S_5 \times S_5$ המוגדרת לפי $f(\sigma, \tau) = (\tau, \sigma)$.

ה. $f\colon \mathbb{R} \to SL_2(\mathbb{R})$ המוגדרת לפי

$$f(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

**שאלה 8** (רשות)**.** תהינה תמורות $\sigma, \tau \in S_n$. הוכיחו שאם $|\operatorname{supp}(\sigma) \cap \operatorname{supp}(\tau)| = 1$, אז $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ הוא מחזור מאורך 3.
רמז: הראו כי $\operatorname{supp}(\sigma^{-1}) = \operatorname{supp}(\sigma)$ לכל תמורה ובדקו לאן נשלח המספר ששייך לחיתוך התומכים.

בהצלחה!