מבנים אלגבריים - תירגול 7

5 במאי 2019

סיכום מושגים והגדרות רלוונטי:

1. G חבורה H תת חבורה. לכל g מגדירים $gH=\{gh : h\in H\}$. בנוסף, מגדירים יחס שקילות על G ע"י H $g_1\sim_H g_2 \iff g_1H=g_2H \iff g_2^{-1}g_1\in H$. מחלקת השקילות של g היא $gH=\{g' : g\sim_H g'\}=[g]$. קבוצת המנה (קבוצת כל מחלקות השקילות) מסומנת $G/H=\{gH : g\in G\}$. משפט: $|H|\cdot|G/H|=|G|$ או לחילופין $|G/H|=\frac{|G|}{|H|}$.

2. G חבורה, ת"ח H תקרא נורמלית אם לכל g מתקיים $gH=Hg$. נורמליות של Hשקול לכך ש: לכל gב G ו h ב H מתקיים כי ghg^{-1} ב H. במידה ו H נורמלית הקבוצה $G/H=\{gH : g\in G\}$ היא חבורה ביחס לפעולה $g_1Hg_2H=g_1g_2H$ ונקראת חבורת המנה. משפט: אם $|G/H|=2$ אז H נורמלית. הערה: בחבורה קומטטיבית כל ת"ח היא נורמלית.

דוגמא: $G=\mathbb{Z}$ השלמים היא קומטטיבית. $H=3\mathbb{Z}$ ת"ח נורמלית (אפשר לעבוד גם בצורה כללית עם $H=n\mathbb{Z}$עבור n טבעי/שלם כלשהוא).

- מתקיים כי $6\sim_H 3\sim_H 0$, מתקיים כי $-2\sim_H 7\sim_H 1$ וכו'
- מחלקת השקילות של 0 היא $[0]=0+3\mathbb{Z}$, מחלקת השקילות של 1 היא $[1]=1+3\mathbb{Z}$, וכו
- קבוצת המנה שבמקרה זה היא חבורת המנה היא $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}=\{[0],[1],[2]\}$ והפעולה $[a]+[b]=[a+b]$ מוגדרת.

משפט האיזומורפיזם הראשון:

יהיו G_1,G_2 חבורות ו $\phi : G_1\to G_2$ הומו' אזי

1. התמונה $im(\phi)=\phi(G_1)\le G_2$ ת"ח
2. הגרעין $ker(\phi)\le G_1$ ת"ח נורמאלית
3. מתקיים $G_1/ker(\phi)\simeq im(\phi)$

הערה: אם ϕ על אזי $G_1/ker(\phi)\simeq G_2$
אם ϕ חח"ע אזי $G_1\simeq im(\phi)$ (כי במקרה זה $\ker\phi=\{e\}$)

דוגמא: $\phi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_3$ המוגדרת $\phi(x)=x \mod 3$ היא הומו' על ולכן $\mathbb{Z}/_{ker(\phi)}\simeq\mathbb{Z}_3$ מהו הגרעין?

$$ker(\phi)=\{x\in\mathbb{Z}:\ \phi(x)=0\}=\{x\in\mathbb{Z}:\ x \mod 3=0\}=3\mathbb{Z}$$

ולכן

$$\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}\cong\mathbb{Z}_3$$

דוגמא $\phi:S_n\to\{-1,1\}$ פונקצית הסימן היא הומו' על
מה הגרעין?

$$ker\phi=\{\sigma:\ sgn(\sigma)=1\}=A_n$$

לכן לפי משפט האיז' מתקיים

$$S_n/_{A_n}\simeq\{-1,1\}\simeq\ \mathbb{Z}_2$$

תרגיל: הוכח כי $SL_n(\mathbb{F})\lhd GL_n(\mathbb{F})$ ומתקיים כי $GL_n(\mathbb{R})/_{SL_n(\mathbb{R})}\simeq\ \mathbb{R}^\times$
פתרון : יהא $A\in GL, B\in SL$ צ"ל $ABA^{-1}\in SL$ ואכן $|ABA^{-1}|=|A||B||A^{-1}|=|A||A^{-1}|=1$
נגדיר $\phi:GL_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^\times$ פונקצית הדט' ונקבל את המבוקש לפי משפט האיזו' הראשון.
תרגיל: נגדיר $G=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|=1\}$ מעגל היחידה עם פעולת כפל . הוכיחו כי

$$\mathbb{C}^\times/_G\cong\mathbb{R}_{>0}$$

פתרון: נגדיר פונקציה

$$\phi:\mathbb{C}^\times\to\mathbb{R}_{>0}$$

ע"י

$$z\mapsto|z|$$