מתמטיקה בדידה – תרגיל 12 – פתרון

שאלה 1

הוכיחו בעזרת הלמה של צורן את עיקרון המקסימום של האוסדורף: תהי $(X,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית. אזי כל שרשרת ב-$(X,\leq)$ מוכלת בשרשרת מקסימלית.

[תזכורת: שרשרת ב-$(X,\leq)$ היא תת קבוצה $Y\subseteq X$ כך שלכל $a,b\in Y$ מתקיים $a\leq b$ או $b\leq a$.
שרשרת נקראת מקסימלית אם היא לא מוכלת באף שרשרת למעט עצמה.]

הוכחה

תהי U קבוצת כל השרשראות ב-$(X,\leq)$. הזוג $(U,\subseteq)$ הוא קס"ח. נוכיח כי היא מקיימת את תנאי הלמה של צורן:

U לא ריקה כי $\phi\in U$ ("השרשרת הריקה").

תהי Y שרשרת ב-U (שימו לב: Y היא <u>שרשרת של שרשראות</u> ב-X!). נוכיח כי קיים חסם מלעיל ל-Y:
נגדיר $C=\cup_{A\in Y}A$. נוכיח כי $C\in U$ (כלומר C שרשרת ב-$(X,\leq)$):

יהיו $x,y\in C$. אזי קיימים $A,B\in Y$ כך ש-$x\in A, y\in B$. היות ו-Y שרשרת (ביחס להכלה), $B\subseteq A$ או $A\subseteq B$. בלי הגבלת כלליות נניח $A\subseteq B$ (אחרת, נחליף בין x,A ל-y,B). אזי $x,y\in B$. היות ו-B שרשרת ב-$(X,\leq)$, $x\leq y$ או $y\leq x$ וזה מה שרצינו להראות.

לכן, $C\in U$ ולכל $A\in Y$ מתקיים $A\subseteq\cup_{B\in Y}B=C$. כלומר, C חסם מלעיל של Y.

הראינו כי $(U,\subseteq)$ מקיימת את תנאי הלמה של צורן ולכן קיים בה איבר מקסימלי Y. Y היא שרשרת מקסימלית ביחס להכלה ולכן גמרנו. **משל.**

שאלה 2

יהי $0<\epsilon\in\mathbb{R}$. תת קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ תיקרא ϵ-דלילה אם לכל $a,b\in A$ *שונים* מתקיים $|a-b|\geq\epsilon$.

א. הוכיחו כי כל קבוצה ϵ-דלילה A מוכלת בקבוצה ϵ-דלילה מקסימלית ביחס להכלה.
[הדרכה: תהי X קבוצת כל תתי הקבוצות ה-ϵ-דלילות של $\mathbb{R}$ המכילות את A. אזי $(X,\subseteq)$ היא קבוצה סדורה חלקית. השתמשו בלמה של צורן כדי להראות כי קיים בה איבר מקסימלי.]

ב. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה ϵ-דלילה <u>מקסימלית</u> ביחס להכלה. הוכיחו כי לכל $b\in\mathbb{R}$ קיים $a\in A$ כך ש-$|a-b|<\epsilon$.

ג. הראו כי כל קבוצה ϵ-דלילה היא בת מנייה. (הערה: הסעיף הזה לא קשור ללמה של צורן.)

הוכחה

הוכחת א: תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה ϵ-דלילה. נגדיר את X להיות קבוצת כל הקבוצות $B\in P(\mathbb{R})$ כך ש-$A\subseteq B$ וגם B ϵ-דלילה. אזי $(X,\subseteq)$ היא קס"ח. נוכיח כי היא מקיימת את תנאי הלמה של צורן.

X לא ריקה כי $A\in X$ (באמת, $A\subseteq A$ וגם A ϵ-דלילה).

תהי Y שרשרת לא ריקה[1] ב-$(X,\subseteq)$. נוכיח כי קיים חסם מלעיל ל-Y: נגדיר $U=\cup_{B\in Y} B$. נראה ש-$U\in X$.

ראשית, קיים $B\in Y$. אזי $B\in X$ ולכן $A\subseteq B$. לכן, $A\subseteq B\subseteq\cup_{C\in Y} C=U$. יהיו $x,y\in U$ שונים, אזי קיימים $B,C\in Y$ כך ש-$x\in B, y\in C$. היות ו-Y שרשרת, $B\subseteq C$ או $C\subseteq B$. בה"כ נניח $B\subseteq C$ (אחרת נחליף בין x,B ל-y,C). אזי $x,y\in C$ ו-$C\in X$ ולכן ϵ-דלילה, כלומר $|x-y|\geq\epsilon$. לכן, הראינו ש-$A\subseteq U$ ו-U ϵ-דלילה, כלומר $U\in X$.

לכל $C\in Y$ מתקיים $C\subseteq\cup_{B\in Y} B=U$ ולכן U חסם מלעיל של Y.

הראינו כי $(X,\subseteq)$ מקיימת את תנאי הלמה של צורן ולכן קיים בה אבר מקסימלי B. אזי B היא ϵ-דלילה, מקסימלית ביחס להכלה ומכילה את A. **משל.**

הוכחת ב: תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה ϵ-דלילה מקסימלית ביחס להכלה. יהי $b\in\mathbb{R}$. צ"ל שקיים $a\in A$ כך ש-$|a-b|<\epsilon$.

אם $b\in A$ נבחר $a=b\in A$ ונקבל $|b-a|=0<\epsilon$, כדרוש. אחרת, $A\subsetneq A\cup\{b\}$. היות ו-A היא קבוצה ϵ-דלילה מקסימלית, נובע ש-$A\cup\{b\}$ אינה ϵ-דלילה (אחרת נקבל סתירה למקסימליות). לכן, קיימים $x,y\in A\cup\{b\}$ שונים כך ש-$|x-y|<\epsilon$. לא ייתכן כי $x,y\in A$ כי אז נקבל סתירה לכך ש-A קבוצה ϵ-דלילה. בנוסף, לא ייתכן כי $x,y\in\{b\}$ כי אז $x=y$ (והנחנו שהם שונים). לכן, בהכרח $x\in\{b\}, y\in A$ או $x\in A, y\in\{b\}$. בה"כ $x\in\{b\}, y\in A$ (אחרת נחליף בין x ו-y). אזי $x=b$. נבחר $a=y\in A$ ונקבל $|a-b|=|y-x|=|x-y|<\epsilon$. **משל.**

הוכחת ג: תהי A קבוצה ϵ-דלילה. כדי להוכיח ש-A בת מנייה מספיק למצוא פונקציה חח"ע $f:A\to\mathbb{Q}$. לכל $a\in A$ נגדיר $B_a=\left(a-\frac{\epsilon}{2},a+\frac{\epsilon}{2}\right)\cap\mathbb{Q}$. היות וכל קטע פתוח לא ריק מכיל מספר רציונלי נובע ש-$B_a\neq\phi$. לכן, לפי אקסיומת הבחירה, קיימת פונקציה $f:A\to\cup_{a\in B_a} B_a\subseteq\mathbb{Q}$ כך ש-$f(a)\in B_a$. גמרנו אם נוכיח ש-f חח"ע: יהיו $a,b\in A$ כך ש-$f(a)=f(b)$. נסמן $x=f(a)=f(b)$. אזי $x\in B_a\cap B_b$ ולכן $x\in\left(a-\frac{\epsilon}{2},a+\frac{\epsilon}{2}\right)\cap\left(b-\frac{\epsilon}{2},b+\frac{\epsilon}{2}\right)$. זה אומר ש-$|x-b|<\frac{\epsilon}{2}$ ו-$|a-x|<\frac{\epsilon}{2}$. לכן, $|a-b|\leq|a-x|+|x-b|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$. היות ו-$A$ היא ϵ-דלילה, בהכרח $a=b$ (אחרת נקבל סתירה לדלילות). **משל.**

שאלה 3

יהיו V,W שני מרחבים וקטוריים מעל שדה F . הוכיחו ללא שימוש במשפטים על בסיסים: קיימת העתקה לינארית חח"ע $T:V\to W$ או שקיימת העתקה לינארית חח"ע $S:W\to V$.

[הדרכה: התבוננו בקבוצת הזוגות (V_0,T) כך ש-V_0 תת מרחב של V ו-$T:V_0\to W$ העתקה לינארית חח"ע. נגדיר יחס סדר על קבוצה זו ע"י $(V_0,T)\leq(V_0',T')$ אם"ם $V_0\subseteq V_0'$ וגם $T'|_{V_0}=T$. השתמשו בלמה של צורן להראות כי קיים זוג (V_0,T) מקסימלי. אז הוכיחו כי מהמקסימילות נובע כי $V_0=V$ או ש-T היא על.]

הוכחה

תהי X קבוצת הזוגות (U,T) כך ש-U הוא תת מרחב של V ו-T היא ה"ל חח"ע מ-U ל-W. נגדיר יחס סדר $\leq$ על X ע"י $(U,T)\leq(U',T')$ אם $U\subseteq U'$ וגם $T'|_{U'}=T$. אזי $\leq$ הוא יחס סדר חלקי. [הסבר:

[1] בלמה של צורן מספיק לבדוק רק שלכל שרשרת לא ריקה יש חסם מלעיל. זאת משום שכל איבר בקס"ח שלנו (שאינה ריקה!) הוא חסם מלעיל של השרשרת הריקה.

הכלה היא יחס סדר חלקי של קבוצות. יחס הצמצום הנ"ל הוא יחס סדר חלקי בין פונקציות. בנוסף, לכל קס"ח $(A,\leq_A),(B,\leq_B)$ הקבוצה $A\times B$ עם היחס $\leq_{A\times B}$ המוגדר ע"י $(a,b)\leq_{A\times B}(a',b')$ אם"ם $a\leq_A a'$ וגם $b\leq_B b'$ היא קס"ח. לחלופין, אתם מוזמנים להוכיח ישירות ש-$\leq$ יחס סדר חלקי.]

נוכיח כי $(X,\leq)$ מקיימת את תנאי הלמה של צורן:

X לא ריקה כי $(\{0\},T)\in X$ כאשר $T:\{0\}\to W$ היא העתקת ה-0 ($T(0)=0$).

תהי Y שרשרת ב-$(X,\leq)$. נראה כי קיים חסם מלעיל ל-Y: עבור זוג סדור $p=(a,b)\in X$ נגדיר את U_p להיות a ואת T_p להיות b. אזי לכל $p\in X$ מתקיים $p=(U_p,T_p)$. כעת נגדיר $U=\cup_{p\in Y}U_p$ ו-$T=\cup_{p\in Y}T_p$ (זכרו שפונקציה היא בעצם יחס ולכן ניתן לאחד פונקציות). מהגדרה זו נובע שאם T היא אכן פונקציה (אנו נוכיח זאת) אזי לכל $p\in Y$ ו-$u\in U_p$ מתקיים $T(u)=T_p(u)$. על מנת להסיק ש-$(U,T)\in X$ עלינו להראות מספר דברים:

1. U תת מרחב של V: יהיו $u,v\in U$ ו-$\alpha\in F$. אזי קיימים $p,q\in Y$ כך ש-$u\in U_p,v\in U_q$. היות ו-Y שרשרת, $p\leq q$ או $q\leq p$. בה"כ $p\leq q$ (אחרת נחליף בין p,u ו-q,v). לכן, $U_p\subseteq U_q$ ולכן $x,y\in U_q$. U_q מ"ו מעל F ולכן $\alpha u,u+v\in U_q$. מהגדרת U נובע $U_q\subseteq U$ ולכן $\alpha u,u+v\in U$, כדרוש.
2. T היא פונקציה מ-U ל-W (זה לא ברור מאליו!): יהי $u\in U$. אזי קיים $p\in Y$ כך ש-$u\in U_p$. לכן, קיים $w\in W$ כך ש-$(u,w)\in T_p$ (כי $T_p:U_p\to W$). נוכיח כי w יחיד: נניח כי $(u,w')\in T$. אזי קיים $q\in Y$ כך ש-$(u,w')\in T_q$. בפרט, $u\in U_q$. היות ו-Y שרשרת $q\geq p$ או $p\leq q$. אם $q\geq p$ אז $w'=T_q(u)=\left(T_p|_{U_q}\right)(u)=T_p(u)=w$. אם $q\leq q$ אז $w'=q=T_p(u)=\left(T_q|_{U_p}\right)(u)=T_q(u)$. בכל מקרה קיבלנו $w=w'$ ולכן w יחיד (כלומר T חד-ערכית).
3. T ה"ל חח"ע מ-U ל-W: יהיו $u,v\in U$ ו-$\alpha\in F$. אזי קיימים $p,q\in Y$ כך ש-$u\in U_p,v\in$ U_q. היות ו-Y שרשרת, $p\leq q$ או $q\leq p$. בה"כ $p\leq q$ (אחרת נחליף בין p,u ו-q,v). לכן, $U_p\subseteq U_q$ ולכן $x,y\in U_q$. כעת, היות ו-T_q ה"ל נובע $T(u+u)=T_q(u+v)=T_q(u)+T_q(v)=T(u)+T(v)$ ו-$\alpha T(u)=\alpha T_q(u)=T_q(\alpha u)=T(\alpha u)$. בנוסף, אם $T(u)=T(v)$ אז $T_q(u)=T(u)=$ $T_q(v)=T(v)$ ולכן $u=v$ כי T_q חח"ע.

נותר להראות כי (U,T) חסם מלעיל של Y. יהיו $(U',T')\in Y$. אזי מהגדרת U, $U'\subseteq U$ ומהגדרת T, $T(u)=T'(u)$ לכל $u\in U'$, כלומר $T|_{U'}=T'|_{U'}=T'$. לכן, $(U',T')\leq(U,T)$.

הראינו כי $(X,\leq)$ מקיימת את תנאי הלמה של צורן ולכן קיים בה איבר מקסימלי (U,T). נוכיח כי $U=V$ או T היא על:

נניח בשלילה ש-$V\neq U$ וש-T איננה על. אזי קיים $v\in V\setminus U$ וקיים $w\in W\setminus\operatorname{image}T$. נגדיר $U_1=U+Fv\supsetneq U$. היות ו-$Fv\cap U=\{0\}$, מתקיים $U_1=U\oplus Fv$. נגדיר העתקה לינארית $T_1:U_1\to W$ ע"י $T_1(u+\alpha v)=T(u)+\alpha w$ (T_1 מוגדרת היטב כי לכל $x\in U$ קיימים יחידים $u\in U,\alpha\in F$ כך ש-$x=u+\alpha v$). אזי $T_1:U_1\to W$ היא העתקה לינארית ומתקיים $T_1|_U=T$ (בדקו!). נראה כי $\ker T_1=\{0\}$ ולכן T_1 חח"ע. נניח כי $T_1(u+\alpha v)=$ 0. אזי $Tu+\alpha w=0$ ולכן $Tu=-\alpha w$. היות ו-$Fw\cap\operatorname{image}T=\{0\}$ נובע ש-$\alpha=0$ ו-$Tu=0$. T חח"ע ולכן $u=0$, כלומר $u+\alpha v=0$. לפיכך, $(U_1,T_1)\in X$ ומתקיים $(U,T)\lneqq(U_1,T_1)$. כלומר קיבלנו סתירה למקסימליות של (U,T).

אם $U = V$ אז T ה"ל חח"ע מ-V ל-W וגמרנו. אחרת, $T: U \to W$ היא ה"ל חח"ע <u>ועל</u>. לכן, קיימת לה פונקציה הפוכה $S = T^{-1}: W \to U$. מאלגברה לינארית אנחנו יודעים ש-S ה"ל ו-S חח"ע כי היא הפיכה. לכן, אם נחשוב על S כפונקציה מ-W אל V (במקום אל U) נקבל ה"ל חח"ע מ-W ל-V. **משל.**

שאלה 4

תהי A קבוצה אינסופית. הוכיחו כי קיים יחס שקילות על A בו כל מחלקות השקילות הן בנות שני איברים בדיוק.

הוכחה

אפשר להוכיח את זה עם הלמה של צורן, בדומה לתרגיל אחר שעשינו בשיעור. כנראה אחרי השאלה הקודמת אין לכם כוח לראות עוד פתרון בעזרת הלמה של צורן ולכן נציג פיתרון המשתמש בחשבון עוצמות.

הוכחה: יהי $|A| = \alpha$. אזי α אינסופי ולכן $|\{0,1\} \times A| = 2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha = \alpha = |A|$. לכן, קיימת $f: A \to \{0,1\} \times A$ חח"ע ועל. תהי $p: \{0,1\} \times A \to A$ מוגדרת ע"י $p(n,a) = a$ (לפונקציה כזו קוראים <u>*הטלה*</u> *לרכיב השני*) ונגדיר $g: A \to A$ ע"י $g = p \circ f$. לפי משפט מההרצאה, היחס $R = \ker g := \{(a,b) \in A | g(a) = g(b)\}$ הוא יחס שקילות.[2] נגדיר $\Pi = A/\ker g$ - קבוצת מחלקות השקילות של $\ker g$. אזי Π היא חלוקה של A. גמרנו אם נוכיח שבכל קבוצה ב-Π יש בדיוק שני איברים.

תהי $B \in \Pi$. אזי B לא ריקה ולכן קיים $a \in B$. נגדיר $x = g(a)$. מהגדרת היחס R נובע ש-$B = g^{-1}(\{x\})$ (התמונה ההפוכה של $\{x\}$). בנוסף, מתקיים $g^{-1}(\{x\}) = f^{-1}\left(p^{-1}(\{x\})\right)$ *[הסבר: לכל 3 קבוצות A,B,C, פונקציות $f: A \to B, g: B \to C$ וקבוצה $Y \subseteq C$ מתקיים $(gf)^{-1}(Y) = \left(f^{-1}\left(g^{-1}(Y)\right)\right)$ – בדקו!]*. הפונקציה f^{-1} חח"ע ולכן $|B| = \left|f^{-1}\left(p^{-1}(\{x\})\right)\right| = |p^{-1}(\{x\})|$. לכן, כדי להוכיח $|B| = 2$ מספיק לבדוק ש-$|p^{-1}(\{x\})| = 2$. באמת,

$$p^{-1}(\{x\}) = \{(n,a) \in \{0,1\} \times A \mid p(a) = x\} = \{(n,a) \in \{0,1\} \times A \mid a = x\} = \{0,1\} \times \{x\}$$

ולכן $|p^{-1}(\{x\})| = |\{0,1\}| \cdot |\{x\}| = 2 \cdot 1 = 2$. **משל.**

שאלה 5

תהי X קבוצה לא ריקה. הוכיחו כי קיים יחס סדר מלא על X.

[הדרכה: תהי L קבוצת הזוגות (A,R) כך ש-$A \subseteq X$ ו-R יחס סדר מלא על A. נגדיר יחס סדר חלקי על L על ידי $(A,R) \leq (A',R')$ אם $A \subseteq A'$ וגם $R \subseteq R'$. אזי $(L,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית. הראו בעזרת הלמה של צורן כי קיים איבר מקסימלי (A,R) ב-L . הראו כי המקסימליות של (A,R) גוררת ש-$X = A$.]

הוכחה

תהי L קבוצת הזוגות (A,R) כך ש-$A \subseteq X$ ו-R יחס סדר מלא על A. נגדיר יחס סדר חלקי על L על ידי $(A,R) \leq (A',R')$ אם $A \subseteq A'$ וגם $R \subseteq R'$. אזי $(L,\leq)$ קבוצה סדורה חלקית (ראו הסבר בשאלה 3). נוכיח כי $(L,\leq)$ מקיימת את תנאי הלמה של צורן.

<u>L לא ריקה כי $(\phi,\phi) \in L$.</u>

[2] הערה: ה-ker המופיע בהגדרת g שונה מהגרעין של העתקות לינאריות באלגברה לינארית.

תהי Y שרשרת ב-L. נראה כי ל-Y יש חסם מלעיל: עבור זוג סדור $p=(x,y)\in L$, נגדיר $A_p=x$, $R_p=y$. אזי $p=(A_p,R_p)$. נגדיר $A=\cup_{p\in Y}A_p$ ו-$R=\cup_{p\in Y}R_p$. לפני שנוכיח $(A,R)\in L$ נזדקק לטענה הבאה:

טענה: לכל $p\in Y$, $R\cap A_p\times A_p=R_p$.

הוכחה: R_p יחס על A_p ולכן $R_p\subseteq A_p\times A_p$. אבל $R_p\subseteq R$ ולכן $R_p\subseteq R\cap(A_p\times A_p)$. נניח ש-$(x,y)\in R\cap A_p\times A_p$ ונוכיח ש-$(x,y)\in R_p$: אז קיים $q\in Y$ כך ש-$(x,y)\in R_q$. אם $q\le p$ אז $(x,y)\in R_q\subseteq R_p$, כדרוש. אחרת, $R_p\subseteq R_q$. היות ו-R_p יחס סדר מלא, $(x,y)\in R_p$ או $(y,x)\in R_p$. במקרה הראשון סיימנו. במקרה השני $(x,y),(y,x)\in R_q$ והיות ו-R_q יחס סדר $x=y$. אבל אז $(x,y)=(x,x)\in R_p$ כי R_p רפלקסיבי. בכל מקרה קבלנו $(x,y)\in R_p$. לכן $R\cap A_p\times A_p\subseteq R_p$. משל.

נראה כי R יחס סדר מלא על A: יהיו $a,b,c\in A$. אזי קיימים $p,q,r\in X$ כך ש-$a\in A_p,b\in A_q,c\in A_r$. הקבוצה $\{p,q,r\}$ היא שרשרת סופית ב-$(X,\le)$ (כי Y שרשרת) ולכן קיים בה איבר מקסימלי $(B,S)\in\{p,q,r\}$. אזי $a,b,c\in B$ ו-$S\subseteq\cup_{p\in Y}R_p=R$. לכן:

1. $(a,a)\in S=R$ (כי S רפלקסיבי).
2. אם aRb ו-bRa אז מהטענה נובע ש-aSb ו-bSa (כי $S=R\cap B\times B$) ולכן $a=b$ (כי S אנטי סימטרי).
3. אם aRb ו-bRc אז מהטענה נובע ש-aSb ו-bSc ולכן aSc. היות ו-$S\subseteq R$, נובע ש-aRc.
4. היות ו-S יחס סדר מלא, aSb או bSa. היות ו-$S\subseteq R$, נובע ש-aRb או bRa.

מ-1,2,3 נובע ש-R הוא רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי. לכן, R יחס סדר. מ-4 נובע ש-R יחס סדר מלא. לכן, $(A,R)\in L$ ומהגדרת (A,R), (A,R) הוא חסם מלעיל של Y.

הראינו כי תנאי הלמה של צורן מתקיימים עבור $(L,\le)$ ולכן ב-$(L,\le)$ קיים איבר מקסימלי (A,R). אם נוכיח $A=X$, אז נובע ש-R הוא יחס סדר מלא על X.

נניח בשלילה ש-$A\neq X$. אזי קיים $x\in X\setminus A$. נגדיר $A_1=A\cup\{x\}$ ו-$R_1=R\cup\{x\}\times A_1$. ברור כי $A_1\supsetneq A$ ו-$R_1\supsetneq R$. לכן, אם נוכיח ש-R_1 יחס סדר מלא על A_1 נקבל ש-$(R_1,A_1)\gneqq(R,A)$ וזו סתירה למקסימליות של X. נוכיח ש-R_1 יחס סדר מלא על A_1 (ואז סיימנו):

בהוכחה נעזר בשתי תכונות שאת הוכחת נשאיר כתרגיל פשוט:

א. $R=R_1\cap A\times A$

ב. לכל $a\in A_1$ מתקיים xR_1a.

כעת:

1. R_1 רפלקסיבי: יהי $a\in A_1$. אם $a\in A$ אז $(a,a)\in R\subseteq R_1$. אחרת, $x=a$ ואז $(x,x)\in\{x\}\times A_1\subseteq R_1$.
2. R_1 אנטיסימטרי: יהיו $a,b\in A_1$ כך ש-aR_1b וגם bR_1a. אם $a,b\in A$ אז aRb ו-bRa (בגלל תכונה א) ולכן $a=b$ כי R אנטי סימטרי. אחרת, $a=x$ או $b=x$. בה"כ נניח $a=x$ (אחרת נחליף בין a ו-b). אזי $(x,b),(b,x)\in R_1=R\cup\{x\}\times A_1$. היות ו-$(b,x)\notin R$ (כי $x\notin A$) נובע ש-$(b,x)\in\{x\}\times A_1$. אבל זה אומר ש-$b=x=a$, כדרוש.
3. R_1 טרנזיטיבי: יהיו $a,b,c\in A_1$ כך ש-aR_1b,bR_1c. אם $a,b,c\in A$ אז aRb,bRc (בגלל תכונה א). לכן aRc כי R טרנזיטיבי ונובע aR_1c. אחרת, $a=x$ או $b=x$ או $c=x$.
אם $a=x$, אז aR_1c בגלל תכונה ב.

אם $b=x$ אז bR_1a בגלל תכונה ב וגם aR_1b. לכן לפי אנטיסימטריות של R_1 נקבל $a=b=x$ וגמרנו לפי המקרה הקודם.
אם $c=x$ אז cR_1b בגלל תכונה ב וגם bR_1c. לכן לפי אנטיסימטריות של R_1 נקבל $b=c=x$ וגמרנו לפי המקרה הקודם.
בכל מקרה קיבלנו aR_1c.

4. R_1 יחס סדר מלא: יהיו $a,b\in A_1$. אם $a,b\in A$ אז aRb או bRa (כי R יחס סדר מלא) ולכן aR_1b או bR_1a. אחרת, $a=x$ או $b=x$. בה"כ $a=x$ (אחרת נחליף בין a ו-b). לכן, לפי תכונה ב, aR_1b. בפרט, aR_1b או bR_1a.

משל.

שאלה 6

קבוצה סדורה לינארית $(X,\leq)$ נקראת סדורה היטב אם לכל $\phi\neq Y\subseteq X$ קיים ב-Y איבר קטן ביותר (ביחס ל-$\leq$). עקרון הסדר הטוב קובע כי לכל קבוצה X קיים יחס סדר מלא $\leq$ על X כך ש-$(X,\leq)$ סדורה היטב.

הוכיחו את אקסיומת הבחירה בעזרת עיקרון הסדר הטוב.

[הדרכה: יהי $\{Y_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות. נגדיר $X=\cup_{i\in I}Y_i$. השתמשו בעיקרון הסדר הטוב כדי לקבל יחס סדר מלא $\leq$ על X כך ש-$(X,\leq)$ סדור היטב. העזרו בתכונות של $\leq$ כדי לבנות פונקציה $f: I\to X$ כך ש-$f(i)\in Y_i$ לכל $i\in I$.]*

**ללא שימוש באקסיומת הבחירה!*

הוכחה

יהי $\{Y_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות ו-$X=\cup_{i\in I}Y_i$. לפי עיקרון הסדר הטוב קיים יחס סדר $\leq$ על X כך ש-$(X,\leq)$ סדורה היטב. לכן, לכל Y_i, קיים ב-Y_i איבר קטן ביותר (ביחס ל-$\leq$), שנסמנו ב-$y_i\in Y_i$. איבר זה הוא בהכרח יחיד (לא ייתכנו שני איברים קטנים ביותר). נגדיר $f: I\to X$ ע"י $f(i)=y_i(=\min_{\leq}Y_i)$. אזי f היא פונקציית בחירה כי לכל $i\in I$ מתקיים $f(i)=y_i\in Y_i$. **משל.**

הערה: לא השתמשנו בבניית f באקסיומת הבחירה כי בחרנו את האיברים בקבוצות $\{Y_i\}_{i\in I}$ באמצעות "נוסחה מפורשת" (שהשתמשה ביחס $\leq$).