אינפי 3 תרגול 4, סמסטר א' 2014

11 בנובמבר 2013

שאלה אחרונה על רציפות:

תהי $f(x,y)=\begin{cases}\frac{y-\sin y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$. האם f רציפה ב־$(0,0)$?

תשובה: צריך להבין מה היחס בין קצב ההתכנסות של ל־0 של $y-\sin y$ (כאשר $y\to 0$) מול קצב ההתכנסות של x^2+y^2 (כאשר $x,y\to 0$) . ניקח פיתוח מקלורן של $\sin y$ סביב $y_0=0$ ממעלה 3:

$$\sin y = y-\frac{y^3}{3!}+\underbrace{R_3(y)}_{\text{taylor error}} \quad \Rightarrow y-\sin y=\frac{y^3}{3!}-R_3(y)$$

ז"א $y-\sin y\approx\frac{y^3}{6}$ כאשר $y\to 0$). אבל $\frac{y-\sin y}{y^3}=\frac{1}{6}-\frac{R_3(y)}{y^3}$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{y\to 0}\frac{y-\sin y}{y^3}=\frac{1}{6}$

$\frac{R_n(y)}{y^n}\stackrel{y\to 0}{\to}0$. ואז:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y-\sin y}{y^3}\cdot\frac{y^3}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$$

כאשר הפו' השנייה חסומה בין 0 ל1 והראשונה אפסה. לכן הגבול הוא 0.

רציפות במ"ש, נגזרות חלקיות ודיפרנצאביליות

הגדרה: הפונקציה $u=f(\underline{x})$ רציפה במ"ש בתחום $D\subseteq\mathbb{R}^n$ אם לכל $\epsilon>0$ יש $\delta_\epsilon>0$ (התלוי ב־ϵ בלבד) כך שלכל 2 נקדוות $\underline{x}_1,\underline{x}_2\in D$ המקיימות $||\underline{x}_1-\underline{x}_2||<\delta$ מתקיים $|f(\underline{x}_1)-f(\underline{x}_2)|<\epsilon$.

דוגמה 1: הוכח כי הפונקציה $u=\arcsin\frac{x}{y}$ רציפה בתחום: $D=\{(x,y)\mid |x|\le|y|,\quad y\neq 0\}$ <u>אבל</u> לא רציפה שם במ"ש.

תשובה:

תחילה נגדיר כי $u(x,y)$רציפה ב־D כהרכבה של פונקציות רציפות מכיוון ש$v(x,y)=\frac{x}{y}$ מנה של פולינומים עם מכנה $0\neq$ ב־D ולכן רציפה, $\arcsin t$ רציפה בתחום הגדרתה $-1\le t\le 1$. למה לא רציפה במ"ש ב־D?

נגדיר שתי סדרות של נקודות ב־$\mathbb{R}^2$: $M_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right),N_n=\left(\frac{1}{n},-1/n\right)$.

$$||M_n-N_n||=\frac{2}{n}\to 0$$

אבל:

$$|f(M_n)-f(N_n)|=\left|\underbrace{\arcsin 1}_{\frac{\pi}{2}}-\underbrace{\arcsin(-1)}_{-\frac{\pi}{2}}\right|=\pi \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$$

וזה בניגוד להגדרה של רציפות במ"ש.

<u>הערה:</u> אנו מדברים על פונקציות בכמה משתנים לכן אין כאן קרטיריון ברור אחר פרט להגדרה בשלב זה.

נגזרות חלקיות ודיפרנצאביליות

הגדרה:

עבור פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ **:** $u=f(x_1,\ldots,x_n)$**. נגדיר** $\frac{\partial u}{\partial x_k}(x_1^0,\ldots,x_n^0)$ **נגזרת חלקית של** u **(f) לפי** x_k **באופן הבא:**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1^0,\ldots,x_k^0+h,\ldots,x_n^0)-f(x_1^0,\ldots,x_n^0)}{h}$$

ועבור $u=f(x,y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

ובאופן דומה לגבי y

דוגמה טכנית פשוטה ביותר: נתון $x>0 \quad u=f(x,y)=x^y,$ לחשב $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y),\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$.

תשובה:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= yx^{y-1}\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= x^y\cdot\ln x\end{aligned}$$

הערה: קיום כל הנגזרות החלקיות בנקודה (לגבי כל אחד מהמשתמנים) לא אומר אפילו שיש גבול (רגיל) באותה הנקודה!

דוגמה (ב־$\mathbb{R}^n$). $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & ,\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$. ידוע כי $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ לא קיים (מספיק לקחת מסלולים $y=k\cdot x, x\to 0$) אבל הנגזרות החלקיות ב־ $(0,0)$ כן קיימות. לראייה (חישוב לפי הגדרה):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{0\cdot h}{0^2+h^2}}{h}=0$$

ובאפן אנלוגי: $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. דוגמה זו מראה שהמושג נגזרת חלקית מאוד חלש ולא מספיק אפילו לרציפות.

כיצד נכיל את מושג הגזירות לפונקציות של כמה משתנים? עבור פונקציה סקלרית של 2 משתנים: תהי $u = f(x,y)$ מוגדרת בסביבת (x_0,y_0). נגדיר: $\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0)$ ההשתנות של u בסביבת הנקודה (x_0,y_0) (אנו מניחים כי $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$ נשארים בסביבת (x_0,y_0)). נאמר כי f - דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0) אם ניתן לרשום $\Delta u = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y$ כאשר A,B קבועים ו־$\alpha(\Delta x,\Delta y), \beta(\Delta x,\Delta y)$ הן זניחות כאשר $\Delta x,\Delta y \to 0$. ניסוח שקול לα,β בביטוי: $\epsilon(\Delta x,\Delta y)\cdot\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ (ז"א $\epsilon\cdot \|$) . באופן דומה עבור n משתנים. ללא α,β מדובר אגב בקירוב הליניארי בנקודה.

תנאים הכרחיים לדיפר':

1. אם $f(x,y)$ דיפר' ב־(x_0,y_0) היא רציפה שם.
2. אם $f(x,y)$ דיפר' ב־(x_0,y_0), קיימות הנגזרות החלקיות $f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$ ואזי בהגדרה של דיפר' $A = f_x(x_0,y_0); B = f_y(x_0,y_0)$.

תנאי מספיק לדיפר' (לא הכרחי): אם ל$f(x,y)$ יש נגזרות חלקיות בסביבת (x_0,y_0) והן פונקציות רציפות ב(x_0,y_0) אזי f דיפר' בנקודה.

דוגמה: נגדיר $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$. באילו נקודות הפונקציה הנ"ל דיפרנציאבלית?

תשובה: $f(x,y)$ היא פונקציה רציונלית במשתנים x,y עבור $(x,y)\neq 0$ [מנה של פולינומים], לכן היא רציפה בנקודות אלה וכך גם $f_x(x,y), f_y(x,y)$ (נגזרות מנה), פונקציות רציונאליות ולכן שוב רציפות ב־$(x,y)\neq(0,0)$ ולכן לפי תנאי מספיק לדיפרנצאביליות, f ידפרנצאבילית (גזירה) בכל $(x,y)\neq(0,0)$. צריך לבדוק מה המצב בנקודה $(0,0)$:

א. האם רציפה? כן, כי $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ (להוכיח לפי סנדוויץ' ש$\frac{y^4}{x^2+y^2}, \frac{x^3}{x^2+y^2} \to 0$).

ב. האם קיימות נגזרות חלקיות ב$(0,0)$? כן, למשל לפי לפי x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = 1$$

ולפי y יוצא $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

ג. האם הנגזרות החלקיות (כפונקציות): $f_x(x,y), f_y(x,y)$ רציפות בראשית הצירים?

<u>תשובה:</u> אם נחשב נגזרות אלה באופן טכני (נגזרות מנה עבור $(x,y)\neq(0,0)$) נקבל:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \begin{cases} \frac{x^4+3x^2y^2-2y^4}{(x^2+y^2)^2} & , \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & , \quad (x,y)=(0,0) \end{cases} \\ f_y(x,y) &= \begin{cases} 2y^5+4x^2y^3-2x^3y & , \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \quad (x,y)=(0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

<u>טענה:</u> $f_x(x,y)$ לא רציפה בראשית כי יש מסלול $x=0, y\to 0$ בו $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=0\neq 1$ $\Leftarrow$תנאי מספיק לא מתקיים.

ד. האם f דיפר' ב־$(0,0)$? אין ברירה אלא להשתמש בהגדרת הדיפר': נחשב השתנות:

$$\Delta f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\frac{(\mathbf{\Delta x})^{\mathbf{3}}+(\mathbf{\Delta y})^{\mathbf{4}}}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

האם ניתן לרשום:

$$\Delta f(0,0)=\frac{(\Delta x)^3+(\Delta y)^4}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=1\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+\epsilon(\Delta x,\Delta y)\cdot\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

כאשר $\epsilon\to 0$. נבודד את הϵ לקבל

$$\epsilon(\Delta x,\Delta y)=\frac{(\Delta y)^4-\Delta x(\Delta y)^2}{\left((\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right)^{1.5}}$$

ומראים כי $\epsilon\not\to 0$ על המסלול $\Delta y=\Delta x\to 0$ והפונקציה לא דיפר' ב־$(0,0)$.
מסקנה: f לא דיפר ב־$\mathbb{R}^2$, פרט ל־$(0,0)$