$f_{\text{דבה}} = 2\pi k\sigma^2$ ליחידת שטח

אנחנו רוצים לכווץ את הבלון מ R ל $R-dr$

$$dW = \overbrace{2\pi k\sigma^2}^{\text{כח ליחידת שטח}} \cdot 4\pi R^2 \cdot dr = k\,8\pi^2 R^2 \cdot \sigma^2 \cdot dr$$

$$= \frac{kQ^2}{2R^2} \cdot dr$$

השדה שיצרנו בכיווץ $E = \frac{k \cdot Q}{R^2}$

$$E^2 \cdot dv = \frac{k^2 Q^2}{R^4} \cdot 4\pi R^2 \cdot dr$$

לכן הקשר בין השדה והאנרגיה

$$dW = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot E^2 \cdot dv$$

$$\boxed{u_e = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2}$$

אנרגיה ליחידת נפח

הרצאה 6

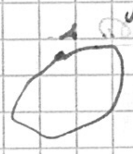
חוק גאוס בצורתו האינטגרלית

שטף $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{a} = 4\pi k \cdot \int \rho \cdot dv \iff \vec{F} = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2}\hat{r}$

מעטפת סגורה — מטען כלוא בתוך המעטפת.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

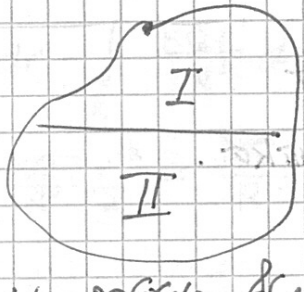
שדה כללי משמר ובפרט שדה קולון.



היום נשקיע לעבור את חוקים אלה לאופן הדיפרנציאלי

$$\Phi = \int E \cdot da$$

$$\Phi = \Phi_I + \Phi_{II}$$



זה נכון בגלל ששדה השטף במעטפת ועוד ההתבטלות של הקטעים בגלל שהם מבטלים אחד את השני [בגלל סימן שונה].

נחלק את המעטפת ל-n מעטפות קטנות

$$\Phi = \sum_i \Phi_i = \sum_i E \cdot da_i$$

דיברגנס: השטף האינפיניטסימלי

Divergence

$$div(E) \equiv \frac{\int E \cdot da}{V} \quad V \to 0$$

$$\Phi = 4\pi k \int \rho \, dv$$

אנחנו יודעים

$$\Phi = \sum_i \Phi_i = \sum_i \int E \cdot da_i$$

$$= \sum_i \frac{V_i \int E \cdot da_i}{V_i}$$

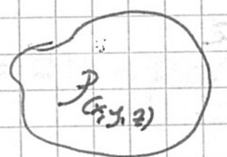
שמביאים את ~~הכל~~ V_i ל-0

$$\xrightarrow[V_i \to 0]{} \int div(E) \cdot dV$$

ולכן

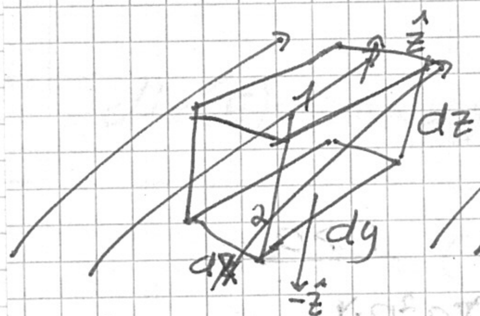
חוק גאוס הדיפרנציאלי $\longrightarrow$ $\boxed{4\pi k \rho = div(E)}$

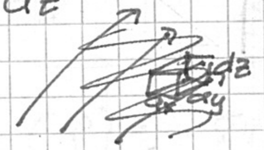
לדוגמה:



$\rho = 0$

לכן הדיברגנס יהיה שווה ל-0





$$E = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}$$

$$\Phi_1 = E_{z_1} dx dy$$

$$\Phi_2 = -E_{z_2} \cdot dx dy$$

$$\Phi_1 + \Phi_2 = \frac{(E_{z_1} - E_{z_2})}{dz} dx \cdot dy \cdot dz$$

$$= \frac{\partial E_z}{\partial z} \cdot dV$$

קוביה קטנה $\Phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \cdot dV$

ולכן ה- $div(E)$ נראה כך:

$$div(E) \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

בקואורדינטות ~~קרטזיום~~ קרטזיות.

הדל

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

del ק.ק.

ניזכר ש-

$$\text{grad}(\varphi) = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z}$$

זה שפועל סקלר על פונקציה ומחזיר וקטור

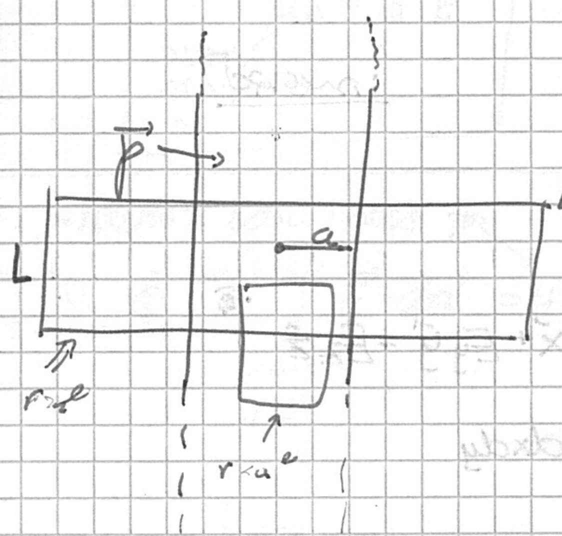
$$\text{div}(E) = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot E_x + \frac{\partial}{\partial y}E_y + \frac{\partial}{\partial z}E_z$$

לכן צורה אחרת של חוק גאוס הדיפרנציאלי:

קרוי גם חוק מקסוול הראשון.

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

ניקח דוגמה של גליל אינסופי



~~$r>a$ | $r<a$~~

~~$E\cdot 2\pi r L$~~

$r>a$

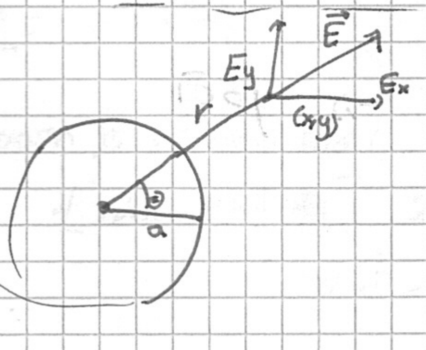
$$E\cdot \cancel{2}\pi r\cdot\cancel{L} = \overset{2}{\cancel{4}}\pi k\cdot\cancel{\pi} a^2\rho\cdot\cancel{L}$$

$$E = \frac{2\pi k a^2\rho}{r}\hat{r}$$

$r<a$:

$$E\cdot\cancel{2\pi r}\cancel{L} = \overset{2}{\cancel{4}}\cancel{\pi}k\cdot\cancel{\pi}\, r^{2}\cancel{L}\cdot\rho$$

$$E = 2\pi k\rho r\hat{r}$$



נשים לב:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

:$r<a$

$$E_x = 2\pi k\rho \cdot r\cos\theta = 2\pi k\rho \cdot \frac{\cancel{r}\cdot x}{\cancel{r}} = 2\pi k\rho x$$

$$E_y = 2\pi k\rho \cdot y$$

$$div(E) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 2\pi k\rho + 2\pi k\rho + 0 = 4\pi k\rho$$

$$= \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

:$r>a$

$$E_x = 2\pi k\rho a^2 \cdot \frac{x}{r^2} = 2\pi k\rho a^2 \cdot \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$E_y = 2\pi k\rho a^2 \cdot \frac{y}{y^2+x^2}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 2\pi k\rho a^2 \left[\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = 2\pi k\rho a^2 \left[\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

ולכן

$$div(E) = 2\pi k a^2\rho \cdot \frac{2x^2+2y^2-2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

$$E = -grad(\varphi) = -\nabla\varphi$$

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = div(E) = \vec{\nabla}\cdot E$$

ולכן

$$-\frac{\rho}{\varepsilon_0} = div(grad\,\varphi)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2 =$$

וזה נקרא לפלסיאן

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)$$

משוואת פואסון:

$$\boxed{\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\nabla^2\varphi = 0}$$

שאין מטענים באותו מקום.