פתרון 12

1) הוכיחו כי לפולינום x^7+x^3+x+1 יש שורש יחיד.

פתרון

הפולינום $f(x)=x^7+x^3+x+1$ רציף בקטע הסגור $[-10,1]$ ומתקיים ש $f(0)=1>0>f(-10)$. לכן, ממשפט ערך הביניים קיים לו לפחות שורש אחד. למעשה בהרצאה ראיתם שלכל פולינום ממעלה אי זוגית יש לפחות שורש אחד. נראה שיש ל$f(x)$ לכל היותר שורש אחד ונסיק הדרוש. נניח בשלילה ש קיימים שני שורשים ל$f(x)$, כלומר קיימים $a<b$ כך ש$f(a)=f(b)=0$.

כעת, $f(x)$ גזירה ב-$\mathbb{R}$ כפולינום ובפרט גזירה ב (a,b) ורציפה ב$[a,b]$ וכן כפי שציינו לעיל $f(a)=f(b)=0$. לכן עפ"י משפט רול קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש $f'(c)=0$. אבל, $f'(x)=7x^6+3x^2+1\geq 1>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ בסתירה.

2) הוכיחו כי לכל $0<a<b$ מתקיים כי $\frac{b-a}{1+b}<\ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right)<\frac{b-a}{1+a}$.

פתרון

יהיו $0<a<b$ עלינו להוכיח ש $\frac{b-a}{1+b}<\ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right)<\frac{b-a}{1+a}$. נשים לב ש

$$\frac{b-a}{1+b}<\ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right)<\frac{b-a}{1+a}$$ אם"ם

$$\frac{b-a}{1+b}<\ln(1+b)-\ln(1+a)<\frac{b-a}{1+a}$$ אם"ם

$$\frac{1}{1+b}<\frac{\ln(1+b)-\ln(1+a)}{b-a}<\frac{1}{1+a}.$$ לכן שקול להוכיח ש

$$\frac{1}{1+b}<\frac{\ln(1+b)-\ln(1+a)}{b-a}<\frac{1}{1+a}.$$ תהי $f(x)=\ln(1+x)$.

פונקציה זו גזירה בכל נקודה $-1<x$ ולכן בפרט, $f(x)$ גזירה בקטע

הפתוח $\left(a,b\right)$ ורציפה ב $\left[a,b\right]$. לכן, עפ"י משפט הערך הממוצע של לגרנז', קיימת נקודה $c\in\left(a,b\right)$ כך ש $\frac{1}{1+c}=f'(c)=\frac{\ln\left(1+b\right)-\ln(1+a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. כעת, $0<a<c<b$ ולכן $\frac{1}{1+a}<\frac{1}{1+c}<\frac{1}{1+b}$. מכאן, $\frac{1}{1+a}<\frac{\ln\left(1+b\right)-\ln(1+a)}{b-a}<\frac{1}{1+b}$ כדרוש.