חשבון אינפי 2
תרגיל 6-פתרון

.1

א. מצאו 3 רכיבים ראשונים בטור טיילור של $\sin \pi x$ סביב הנק' $a = 0.5$.

פתרון:

$$\sin \pi x = \sin \pi\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = \cos \pi\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n)!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{2n} = 1 - \frac{\pi^2}{2!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\pi^4}{4!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 - \ldots$$

או לחלופין ניתן להשתמש בהגדרה של טור טיילור של הפונקציה $\sin \pi x$ סביב הנק' $a = 0.5$ ולקבל:

$f(x) = \sin \pi x$. So $f^{(1)}(x) = \pi \cos \pi x$, $f^{(2)}(x) = -\pi^2 \sin \pi x$, $f^{(3)}(x) = -\pi^3 \cos \pi x$, $f^{(4)}(x) = \pi^4 \sin \pi x$ and so

$$\sin \pi x = \sin\frac{\pi}{2} + \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2!} \times (-\pi^2) + \frac{(x-\frac{1}{2})^4}{4!} \times (\pi^4) + \ldots = 1 - \pi^2 \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{2!} + \pi^4 \frac{(x-\frac{1}{2})^4}{4!} + \ldots$$

ב. בעזרת הפיתוח שמצאתם בסעיף א' מצאו קירוב ל- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$.

פתרון: נציב $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ בפיתוח שמצאנו בסעיף א'

$$\sin \pi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\right) = 1 - \pi^2 \frac{(\frac{1}{10})^2}{2!} + \pi^4 \frac{(\frac{1}{10})^4}{4!} + \ldots \quad = 1 - 0.0493 + 0.0004 \quad = 0.9511$$

.2

א. מצאו שלושה רכיבים ראשונים בטור מקלורן של $\sin(\sin x)$.

פתרון:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\Rightarrow \sin(\sin x) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)^5}{5!} + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{3x^5}{3!3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \quad = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \cdots$$

ב. בעזרת התוצאה מסעיף א' חשבו את הגבול הבא: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin(\sin x)}{x^3}$.

פתרון:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(\sin x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \cdots)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} - \cdots}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{10}\right) = \frac{1}{3}$$

.3 תוך שימוש בנוסחאות טיילור מתאימות חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o\left(x^4\right)\right)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{8}\right)x^4 + o\left(x^4\right)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{12} + \frac{o\left(x^4\right)}{x^4}\right) = -\frac{1}{12}$$

ב. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\sqrt{1+x} - \sin 2x}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\sqrt{1+x} - \sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) - \left(2x - \frac{8x^3}{3!} + o\left(x^3\right)\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{3}{2}x + o(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{3}{2} + \frac{o(x)}{x}\right) = -\frac{3}{2}$$

ג. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x-x^2+o\left(x^2\right)\right)-\left(1+x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

4. המשוואה $e^{-2x}=3x^2$ בעלת שורש בסביבת $x=0$.
מצאו קירוב לשורש זה בעזרת טור טיילור המתאים ל- e^{-2x}.

פתרון:

$$e^{-2x}\approx 1+(-2x)+\frac{(-2x)^2}{2!}=1-2x+2x^2 .$$

$$\Rightarrow\ 1-2x+2x^2=3x^2$$

$$x^2+2x-1=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=\begin{cases}0.414\\-1.41\end{cases}$$

5. בעזרת טור מקלורן של e^x, עבור $x=\frac{1}{2}$, חשבו את $\sqrt{e}$ בדיוק של ארבע ספרות אחרי הנקודה.

פתרון:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

כאשר c בין 0 ל- x.

מכאן, עבור $x=\frac{1}{2}$ נקבל:

$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2 2!}+\cdots+\frac{1}{2^n n!}+\frac{e^c}{2^{n+1}(n+1)!}$$

כאשר c בין 0 ל- $\frac{1}{2}$. גודל השגיאה בקרוב הוא אם כן:

$$|R_n|=\left|\frac{e^c}{2^{n+1}(n+1)!}\right|<\frac{3}{2^{n+1}(n+1)!}$$

הדיוק הרצוי הינו 4 ספרות אחרי הנקודה, לכן

$$\frac{3}{2^{n+1}(n+1)!}<0.00005$$

נקבל כי $n=6$ והקרוב הרצוי הינו

$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2 2!}+\frac{1}{2^3 3!}+\frac{1}{2^4 4!}+\frac{1}{2^5 5!}+\frac{1}{2^6 6!}=1.6487$$

6. הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$

הוכחה:

א. נוכיח כי $\sin x<x$ לכל $x>0$

נגדיר $f(x)=\sin x-x$

$f'(x)=\cos x-1\le 0$ לכל $x>0$ ולכן הפונקציה $f(x)$ יורדת לכל $x>0$

ולכן $f(x)<f(0)=0$

ב. נוכיח כי $x-\frac{x^3}{6}<\sin x$ לכל $x>0$

נגדיר $g(x)=x-\frac{x^3}{6}-\sin x$

$g'(x)=1-\frac{x^2}{2}-\cos x$

$g''(x)=-x+\sin x<0$ לכל $x>0$ (הוכחנו בסעיף א')

ולכן $g'(x)$ פונקציה יורדת לכל $x>0$ ולכן $g'(x)<g'(0)=0$,

ולכן גם הפונקציה $g(x)$ יורדת לכל $x>0$ ולכן $g(x)<g(0)=0$.

משי"ל