ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי
עזר אסורים או יתפס בהעתקה
יענש בחומרה עד כדי הרחקתו
מהאוניברסיטה

קורס: 88-230-01, ל' אדר א', תשע"ו
מרצה: פרופ' ש. נבו

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי 3
מועד ב'

ענו על 6 השאלות הבאות. כל שאלה שווה 18 נקודות. משך הבחינה שלוש שעות.
חומר עזר אסור פרט למחשבון פשוט. <u>אתם חייבים לנמק כל תשובה</u>.

1. נניח ש- $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ היא קבוצה סגורה. הוכיחו שקיימת נקודה $p \in K$ כך שלכל נקודה $q \in K$ מתקיים $\|p\| \le \|q\|$. 18
הדרכה: עיינו בחיתוך של K עם כדור מספיק גדול שמרכזו בראשית.

2. נגדיר $f(x,y)=\begin{cases} xy\ln(x^2+y^2) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.
   א. הוכיחו ש- f רציפה בנקודה $(0,0)$. 6
   ב. קבעו אם f דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$. 6
   ג. האם f רציפה או דיפרנציאבילית בנקודות $(x,y)\neq(0,0)$? 6

3. א. מצאו את כל הנקודות הקריטיות של הפונקציה $f(x,y)=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$ ומיינו אותן. 10
   ב. נגדיר משטח ב- $\mathbb{R}^3$ ע"י המשוואה $z=x^2+y^2$. מצא נקודה על משטח זה שבה המישור המשיק למשטח מאונך לוקטור $(1,1,-2)$. 8

4. א. מצאו נפח הגוף D $\quad D=\left\{(x,y,z): x^2+y^2\le 4,\ 0\le z\le 2x\right\}$ 10
   ב. כתבו הפונקציה 8
   $h(t)=\int_0^t\left(\int_0^x f(y)y\,dy\right)x\,dx,\ t>0$ כאינטגרל חד מימדי.

5. הוכיחו שקיים כדור $B\subset\mathbb{R}^4$ שמרכזו בנקודה $(2,1,-1,-2)$ ופונקציות $f,g:B\to\mathbb{R}$ במחלקה C^1 כך שלכל נקודה $(x,y,z,w)\in B$ מתקיים $f^2+g^2+w^2=29$ וגם $\frac{f^2}{x^2}+\frac{g^2}{y^2}+\frac{w^2}{z^2}=17$. 18

6. א. חשבו $\frac{\partial^{21} f}{\partial x^9\partial y^{12}}(0,0)$ עבור $f(x,y)=e^{x^3y^4}$. 9
   ב. תהי $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ המקיימת $f_x'=f_y'$ בכל נקודה. הראו כי יש $h\in C^1(\mathbb{R})$ כך ש- $f(x,y)=h(x+y)$. 9
   הדרכה: בדוק את f על קווים מהצורה $x+y=c$.

בהצלחה

פתרון מועד ד' 88230 תשע"ו

1. ניקח R גדול מספיק כך ש- $A=\bar{B}(0,R)\cap K\neq\phi$.
A חסומה כי מוכלת ב- $B(0,R)$ וסגורה כחיתוך של שני סגורים לכן קומפקטית וככה יש לפונקציית המרחק, $f(\bar{x})=\|x\|$ מינימום ב- A כלומר יש $P\in K$ אשר לכל $Q\in A$ $\|P\|\le\|Q\|$. ברור ש $\|P\|\le R$ ולכן לכל Q, $Q\in K-\bar{B}(0,R)$ מקיים $\|P\|<\|Q\|$ וסה"כ לכל $Q\in K$ מקיים $\|P\|\le\|Q\|$ כנדרש.

2. א. עבור $(x,y)\neq(0,0)$ $|xy|\le x^2+y^2$ ואז נסמן $z=x^2+y^2$
$z\to0$ מקבל $|xy\ln(x^2+y^2)|<z\ln z\to0=f(0,0)$ לכן f רציפה ב $(0,0)$.

ב. $f=0$ על ציר x, ציר y לכן $f'_y(0,0)=f'_x(0,0)=0$.
קריטריון דיפ': $xy\ln(x^2+y^2)=0+0\cdot x+0\cdot y+\varepsilon\sqrt{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow|\varepsilon|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\sqrt{x^2+y^2}\,\ln(x^2+y^2)=z\ln z^2=2z\ln z\to0$$

לכן f דיפ' ב $(0,0)$.

ג. בסביבת כל $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ f היא פונקציה אלמנטרית לכן רציפה ובעלת נגזרות חלקיות רציפות ולכן גם דיפרנציאבילית.

3. א. $f'_x=6x^2+y^2+10x\overset{?}{=}0$ $\quad f'_y=2y(x+1)=0$

$x=-1$ או $y=0$. $x=-1\Rightarrow y^2=4\Rightarrow y=\pm2$

$y=0\Rightarrow 6x^2+10x=0\Rightarrow x=0$ או $x=-5/3$.

הקריטיות הן $(-1,-2)$, $(-1,+2)$, $(0,0)$, $\left(-\frac{5}{3},0\right)$

נגזרות מסדר 2: $f''_{xy}=2y$, $f''_{yy}=2x+2$, $f''_{xx}=12x+10$

לכן מטריצת ההסיאן היא

$$H=\begin{pmatrix}12x+10 & 2y\\ 2y & 2x+2\end{pmatrix}$$

$$H(0,0)=\begin{pmatrix}10&0\\0&2\end{pmatrix}\Rightarrow (0,0)_{min}$$

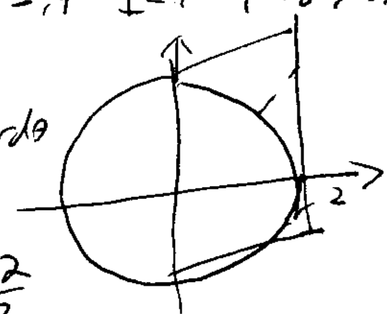
$$H\left(-\tfrac{5}{3},0\right)=\begin{pmatrix}-10&0\\0&-4/3\end{pmatrix}\Rightarrow \left(-\tfrac{5}{3},0\right)_{max}$$

$$H(-1,\pm2)=\begin{pmatrix}-2&\pm4\\\pm4&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det H=-16<0$$ (בכל מקרה)

$(-1,2)$ אוכף.
$(-1,-2)$ אוכף.

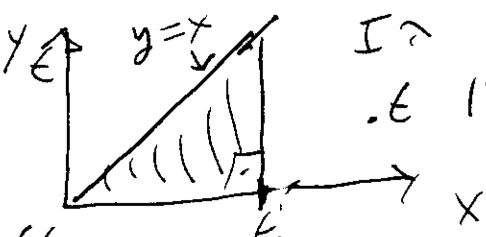
[ג] נבחר המשטח כ- $F(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$ ווקטור מאונך
למישור המשיק הוא הגרדיאנט ∇F. $\nabla F=(2x,2y,-1)$
ונרצה שיהיה תלוי לינארית ב $(1,1,-2)$ כלומר
$(2x,2y,-1)=\lambda(1,1,-2) \Leftarrow \lambda=\frac{1}{2} \Leftarrow x=y=\frac{1}{4}$. נציב
במשוואת המשטח ונקבל $\frac{1}{4}^2+\frac{1}{4}^2-z=0 \Leftarrow z=1/8$ והנקודה
היא $(1/4,1/4,1/8)$.

[4] [א] תחום האינטגרציה הוא ה- $\frac{1}{4}\,\mathbb{R}^3$ העליון הימני, מעל
הרביעים ה-I וה-IV. לפי קואורדינטות גליליות:



$$V=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{2r\cos\theta} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2 2r^2\cos\theta\,dr\,d\theta$$
$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\cdot\int_0^2 2r^2dr=2\cdot\frac{2}{3}2^3=\frac{32}{3}$$

[ב] תחום האינטגרציה הוא משולש ישר זווית
ברביע ה-I ששני ניצביו t. נשנה סדר האינטגרציה ונקבל



$$h(t)=\int_0^t\int_y^t f(y)\,y\,x\,dx\,dy=$$
$$=\int_0^t f(y)\cdot y\left[\int_y^t x\,dx\right]dy=\int_0^t f(y)\cdot y\left(\frac{t^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right)dy$$
$\leftarrow$ $y\,f(y)$ רציף כמכפלת רציפות.

[5] נגדיר פונקציה מ-$\mathbb{R}^6$ ל-$\mathbb{R}^2$: $\bar{F}=\begin{pmatrix}F_1\\F_2\end{pmatrix}:\mathbb{R}^6\to\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases}F_1(x,y,z,w,f,g)=f^2+g^2+w^2-29 & (*)\\ F_2(x,y,z,w,f,g)=f^2/x^2+g^2/y^2+w^2/z^2-17\end{cases}$$
ונחפש נקודות בהן $(x,y,z,w)=(2,1,-1,-2)$

וכן F מוגדרת. מציבים לכן בשתי המשוואות ונפתור עבור f^2,g^2: $f^2+g^2+4=29$, $f^2/4+g^2/1+\frac{4}{1}=17$. נקבל
$f^2=16$, $g^2=9$ כלומר $f=\pm4$, $g=\pm3$ כלומר
4 נקודות אפשריות $(2,1,-1,-2,\pm4,\pm3)$.

הערה: ניתן גם לחלץ מפורשות את f ו-g | כיוון שכאן הע' כל 4 אחר שנבחר
בנקודה לאחר מציאת הפתרון | הראשון

נבדוק האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה (הנקודה רגולרית).

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial f,g} = \begin{pmatrix} 2f & 2g \\ \frac{2f}{x^2} & \frac{2g}{y^2} \end{pmatrix} \underset{(2,1,-1,-2)}{=} \begin{pmatrix} 2f & 2g \\ \frac{2f}{4} & \frac{2g}{1} \end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה היא $3fg \neq 0$ בכ"א מ-4 הנקודות הספציפיות. לכן לכ"א מה-4 קיימת תיבה ב-$\mathbb{R}^6$ מוכלה בה (*) מגדירה את f,g כפונקציה של (x,y,z,w) ואפשר כיווץ גם בלשון כדורים. לכל נקודה, (אחת ל-(4,3)) יש כדור סביב $(2,1,-1,-2)$, B, ופונקציות $f,g: B \to$ סביבה של $(4,3)$ כך ש- $f^2+g^2+w^2=29$ $\frac{f^2}{x^2}+\frac{g^2}{y^2}+\frac{w^2}{z^2}=17$.

ב א לפי פיתוח של e^z

$$f(x,y)=e^{x^3y^4}=1+x^3y^4+\frac{x^6y^8}{2!}+\frac{x^9y^{12}}{3!}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^{3n}y^{4n}}{n!}$$

$$\left|\sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^{3n}y^{4n}}{n!}\right| \le \sum_{n=4}^{\infty}|x^3y^4|^n \underset{\text{אי שוויון}}{=} \frac{x^{12}y^{16}}{1-|x^3y^4|} \underset{\text{x,y קטנים מספיק}}{\le} 2|x^{9}y^{12}| \le 2\sqrt{x^2+y^2}^{28} = o(\sqrt{x^2+y^2}^{21})$$

מכאן שלפי פיתוח טיילור $f(x,y)=e^{x^3y^4}=P_{21,f}^{(0,0)}(x,y)+o(\sqrt{x^2+y^2}^{21})$

השוואת מקדמי x^9y^{12} נותנת $\frac{1}{3!}=\frac{\partial^{21}f(0,0)}{\partial x^9\partial y^{12}}\cdot\frac{1}{9!12!} \Leftarrow \frac{\partial^{21}}{\partial x^9\partial y^{12}}=\frac{9!12!}{3!}$.

ג לכל c קבוע מתקיים על הקו $x+y=c$ $f(x,y)=f(x,c-x)$

נסמן פונקציה זו כ $h_c(x)$ ונגזור (נוכל, גזירה כהרכבה של גזירות ברציפות). מתקיים $h_c'(x)=f'_x(x,c-x)-f'_y(x,c-x)=0$

$f'_x=f'_y$ בכל נקודה.

לכן h_c קבועה כלומר f קבועה על הקו $x+y=c$ כלומר f תלויה ב $x+y$ לכן יש פונקציה של משתנה אחד $h(t)$ כך ש- $f(x,y)=h(x+y)$. ניתן לקחת את h להיות $h(t)=f(t,0)$ לכן h גזירה ברציפות.