אינפי 4 – תרגול 2

הצגה פרמטרית חלקה:

נאמר ש $r(t)$ היא הצגה פרמטרית חלקה , אם לכל ערך של t , $r'(t)$ קיימת ורציפה ו $r'(t)\neq 0$.
במילים אחרות, $r(t)$ חלקה, אם לכל ערך של t , הנגזרות לפי t של רכיבי $r(t)$ רציפות ואין ערך של t שבו כולן מתאפסות. במרחב תלת ממדי, למשל

$$r(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$$

היא פונקציה חלקה של t אם $x'(t)',y'(t)$ ו $z'(t)$ רציפות, ואין ערך של t שבו כל שלוש הנגזרות מתאפסות.

הערה: ניתן להראות שאם $r(t)$ היא פונקציה חלקה, אז זוויות הכוון של הוקטור המשיק $r'(t)$ הן פונקציות רציפות של t.

דוגמא: קבע אם הפונקציה הוקטורית חלקה:

א. $r(t)=a\cos ti+a\sin tj+ctk \quad (a>0,c>0)$

ב. $r(t)=t^2i+t^3j$

פתרון:

א. $r'(t)=-a\sin ti+a\cos tj+ck$. כל שלושת הרכיבים של $r'(t)$ הם פונקציות רציפות, ואין ערך של t שבו כולם מתאפסים. לכן $r(t)$ היא פונקציה חלקה של t. הגרף של $r(t)$ הוא הסליל המעגלי.

ב. $r'(t)=2ti+3t^2j$. אמנם שני הרכיבים רציפים, אבל שניהם שווים לאפס כאשר $t=0$, לכן $r(t)$ אינה חלקה. הגרף של $r(t)$ הוא עקומה שמגמתה כלפי מעלה. שימו לב, שכאשר t קטן מעט מאפס, הזווית בין $r'(t)$ ו i קרובה ל π,

ג. ואילו כאשר t גדול במעט מאפס, הזווית בין $r'(t)$ ו i קרובה לאפס. מכאן שישי שינוי פתאומי ביוון הוקטור המשיק כאשר t גדל ועובר דרך $t=0$.

אורך קשת במרחב התלת ממדי:

אורך הקשת L של עקומה פרמטרית $(a\le t\le b)$ $x=x(t),y=y(t)$ נתון ע"י

$$L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

באותו אופן אורך הקשת L של עקומה פרמטרית $(a\le t\le b)$ $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ נתון ע"י

$$L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$

דוגמא: מצא את אורך הקשת של חלק הסיליל: $x=\cos t,y=\sin t,z=t$ שבין $t=0$ ל $t=\pi$.

פתרון: אורך הקשת הוא

$$L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^\pi\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1}dt=\int_0^\pi\sqrt{2}dt=\sqrt{2}\pi$$

<u>משיק יחידה:</u>

אם C הוא גרף של פונקציה חלקה $r(t)$ במרחב דו- ממדי או תלת-ממדית אז הוקטור $r'(t)$ משיק ל C אם $r'(t)$ ממוקם כך שעקבו בראשו של וקטור המיקום $r(t)$, יתר על כן, הכיוון של $r'(t)$ תואם את מגמת הגידול של t . אם $r'(t)\neq 0$, אז הוקטור $T(t)$ המוגדר על ידי

$$T(t)=\frac{r'(t)}{\left\|r(t)\right\|}$$

משיק ל C, כיוונו תואם את מגמת הגידול של t , ואורכו 1 . נקרא ל $T(t)$ משיק יחידה ל C ב t .

<u>נורמל יחידה:</u>

אם C הינו גרף של פונקציה חלקה $r(t)$, נוכל למצוא פונקציה וקטורית אחרת $N(t)$ כזאת שניצבת ל $T(t)$ בכל נקודה על הגרף ע"י $N=\frac{T'(t)}{\left\|T'(t)\right\|}$.

דוגמא: חשב את $T(t)$ ואת $N(t)$ לסליל המעגלי – $(a>0)$ $x=a\cos t,y=a\sin t,z=ct$

פתרון: וקטור המיקום של נקודה על הסליל הוא –

$$r(t)=(a\cos t)i+(a\cos t)j+ck$$

$$r'(t)=(-a\sin t)i+(a\cos t)\,j+ck$$

$$\|r'(t)\|=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+c^2}=\sqrt{a^2+c^2}$$

$$T(t)=\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}=-\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+c^2}}i+\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}}\,j+\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}k$$

לכן:

$$T'(t)=-\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}}i-\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+c^2}}\,j$$

$$\|T'(t)\|=\sqrt{\left(-\frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2+\left(-\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{a^2+c^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$N(t)=\frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}=(-\cos t)i+(-\sin t)\,j$$