לגבי הבוחן בלינארית- החומר הוא עד פרישה ותלות, כולל. (כלומר, עד בסיס לא כולל).
המבנה של הבוחן כמו בבדידה.
נשלח מייל נפרד על הבוחן בלינארית.

תרגיל: תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו שA הפיכה אמ"ם: לכל קבוצה $\{v_1, ..., v_m\}$ של וקטורים ב$\mathbb{F}^n$, מתקיים שאם הקבוצה בת"ל אז $\{Av_1, ..., Av_m\}$ בת"ל. (במילים: A הפיכה אמ"ם היא מעבירה קבוצות לקבוצות בת"ל).

פתרון: $\Leftarrow$ נניח שA הפיכה. תהי $\{v_1, ..., v_m\}$ בת"ל. צריך להראות ש$\{Av_1, ..., Av_m\}$ בת"ל.
יהי

$$\alpha_1 Av_1 + ... + \alpha_m Av_m = 0$$

המטרה היא להראות שכל המקדמים שווים ל0.
מכיוון שA הפיכה, יש לה הופכית. נכפיל את המשוואה משמאל בהופכית.

$$A^{-1}(\alpha_1 Av_1 + ... + \alpha_m Av_m) = A^{-1}0$$

מתכונת הסדקל הנודד:

$$\alpha_1 A^{-1}Av_1 + ... + \alpha_m A^{-1}Av_m = 0$$

$$\alpha_1 v_1 + ... \alpha_m v_m = 0$$

זה צירוף לינארי מתאפס של קבוצה בת"ל, לכן כל המקדמים שווים 0.
$\Longrightarrow$ תזכורת: $Ae_i = C_i(A)$.
ידוע שלכל קבוצה בת"ל, אם נכפיל את איברי הקבוצה בA נקבל קבוצה בת"ל.
נקח את הקבוצה $\{e_1, ..., e_n\}$. ידוע שזאת קבוצה בת"ל.
מההנחה שלנו, הקבוצה $\{Ae_1, ..., Ae_n\}$ בת"ל. הקבוצה הזאת שווה ל- $\{C_1(A), ..., C_n(A)\}$.
לפי משפט מההרצאה, A הפיכה אמ"ם העמודות שלה בת"ל.

1. מצאו בסיסים ל $C(A), R(A), N(A)$ עבור

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בסיס למרחב השורות:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(לקחנו את השורות ששונות מ0, במטריצה המדורגת).
בסיס למרחב העמודות:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

לוקחים את העמודות במטריצה המקורית, שבמיקום שלהם יש איבר מוביל
בשביל למצוא את מרחב ה0 פותרים את המערכת ההומוגנית. אחרי שפותרים, הבסיס הוא הפתרונות היסודיים.

$$z = t, w = s$$

$$x = -3t - 2s, y = -s$$

$$\begin{pmatrix} -3t - 2s \\ -s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בסיס-

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ נגדיר $B = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times n}$ ו $C = \begin{pmatrix} A \\ A^t \end{pmatrix}$. הוכיחו/הפריכו:

(א) לכל A מתקיים $rank(A) = rank(B)$

(ב) לכל A מתקיים $rank(A) = rank(C)$

(ג) קיימת A שעבור $rank(C) = 2rank(A)$

(ד) קיימת A שעבור $rank(C) > 2rank(A)$

פתרון: א. הוכחה: נדרג את B בשני שלבים. בשלב הראשון נחבר מהשורה $n+i$ את השורה הi. נקבל שכל הn שורות התחתונות מתאפסות. נמשיך לדרג את השירות הראשונות (שקול לדירוג של A). כשנגיע לצורה מדורגת קנונית מספר השורות בה ששונות מ0, שווה למספר השורות ששונות מ0 בצורה המדורגת הקנונית של A. ולכן הדרגות שוות.

ב. הפרכה. בתור דוגמא נקח

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, rank(A) = 1$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, rank(C) = 2$$

ג. אותה דוגמא כמו מסעיף ב'

ד.

$$rank(C) = \dim R(C) = \dim span\left\{R_i(C)\right\} =$$

$$\dim span\left\{C_i(A), R_i(A)\right\} = \dim[C(A) + R(A)] \leq$$

$$\dim C(A) + \dim R(A) = 2rank(A)$$

3. השלימו את קבוצת הוקטורים (נתון שהם בת"ל) הבאה

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 2+i \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

לבסיס של $\mathbb{C}^4$

פתרון: נשים אותם בשורות של מטריצה ונדרג

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1-i & 2+i & 5 \\ & & & \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 2+i & 5 \\ 1+i & 1 & 3 & 0 \\ & & & \end{pmatrix} \xrightarrow{0.5R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5-0.5i & 1+0.5i & 2.5 \\ 1+i & 1 & 3 & 0 \\ & & & \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-(1+i)R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0.5-0.5i & 1+0.5i & 2.5 \\ 0 & 0 & 2.5-1.5i & -2.5-2.5i \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$1-(1+i)(0.5-0.5i) = 0$$

חסרים איברים מובילים בעמודה השניה ובעמודה הרביעית, ולכן נוסיף e_2, e_4

4. הוכיחו (בצורה פשוטה): כל מטריצה לא ריבועית אינה הפיכה.

תזכורת: $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ נקראת הפיכה אם קיימות מטריצות $B \in \mathbb{F}^{n \times m}, C \in \mathbb{F}^{n \times m}$ כך ש$AB = I_m$ ו $CA = I_n$.

הוכחה: $n \neq m$ בה"כ נניח ש$n > m$.

$$rank(A) \leq m$$

$$rank(CA) \leq rank(A) \leq m < n$$

לא ייתכן ש$CA = I_n$, כי

$$rank(I_n) = n$$

5. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ המקיימות $rank(A) + rank(B) > n$. הוכיחו כי $AB \neq 0$.
פתרון: נניח ש$AB = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = 0$$

ואף איבר הוא לא 0.
ניזכר במשפט הדרגה: לכל מטריצה, $C \in \mathbb{F}^{m\times n}$, מתקיים ש:

$$rank(C) + \dim N(C) = n$$

$$0 = C_i(0) = C_i(AB) = AC_i(B)$$

לכן לכל i,

$$C_i(B) \in N(A)$$

מכיוון ש$N(A)$ הוא תת מרחב,

$$C(B) = span\{C_i(B)\} \subseteq N(A)$$

לכן

$$\dim C(B) \leq \dim N(A)$$

נשתמש במשפט הדרגה. נוסיף לשני האגפים $\dim C(A)$

$$\dim C(B) + \dim C(A) \leq \dim N(A) + \dim C(A)$$

$$rank(B) + rank(A) \leq \dim N(A) + rank(A) = n$$

סתירה.

6. תהא

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & * \\ 1 & * & 1 \\ * & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

כך שקיימים 2 פתרונות בת"ל למערכת $Ax = 0$. מצאו את A.
פתרון: מהעובדה שיש שני פתרונות בת"ל למערכת ההומוגנית, ניתן להסיק ש$\dim N(A) \geq 2$.
ממשפט הדרגה נקבל ש$\dim C(A) = 0 \vee 1$.
לא ייתכן שהממד הוא 0, כי זה קורה רק במטריצת ה0.

$$\dim C(A) = 1$$

לכן

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ הוכיחו כי

(א) $rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B)$
פתרון:

$$rank(A+B) = \dim C(A+B)$$

לכל i,

$$C_i(A+B) = C_i(A) + C_i(B)$$

לכן

$$C(A+B) \subseteq C(A) + C(B)$$

מכאן:

$$\dim C(A+B) \leq \dim\left[C(A) + C(B)\right] \leq \dim C(A) + \dim C(B)$$

לסיום, נחליף את $\dim C()$ ב$rank$

$$rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B)$$