אלגברה לינארית 1 - הרצאה 6

תזכורת:

V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$

[למשל: $\mathbb{F}^n$, $\mathbb{F}^{m\times n}$, $\mathbb{F}_n[x]$, ...]

$U\leq V$ <u>תת-מרחב</u> של V אם $U\subseteq V$ והוא מרחב וקטורי ביחס לאותן פעולות של V.

הגדרנו פעולות על תת-מרחבים: $U,W\leq V$

(1) $U\cap W$ - תת-המרחב הגדול ביותר של V שמוכל ב-U וב-W

(2) $U\cup W$ - לא תת-מרחב אלא אם $U\subseteq W$ או $W\subseteq U$.

(3) $U+W=\{u+w \mid u\in U, w\in W\}$ - תת-המרחב הקטן ביותר של V שמכיל את U ואת W.

דוגמה:

$V=\mathbb{R}^3$ עם תת-המרחבים $U=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\a+b\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$, $W=\left\{\begin{pmatrix}a\\a+b\\b\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$

יהי $v\in V$.

$v\in U+W \iff$ קיימים $u\in U$ ו- $w\in W$ שעבורם $v=u+w$.

למשל:

$$\underset{\in U}{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}}+\underset{\in W}{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}\in U+W$$

אבל אפשר גם:

$$\underset{\in U}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}+\underset{\in W}{\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}\in U+W$$

אפשר כך:

$$\underset{\underset{u}{\cap}}{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}} + \underset{\underset{w}{\cap}}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} \in U+W$$

ואינסוף דרכים:

$$\underset{\underset{u}{\cap}}{\begin{pmatrix}1\\1+\alpha\\2+\alpha\end{pmatrix}} + \underset{\underset{w}{\cap}}{\begin{pmatrix}1\\2-\alpha\\1-\alpha\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} \in U+W$$

מה החיתוך?

$$U=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\a+b\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}, \quad W=\left\{\begin{pmatrix}a\\a+b\\b\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

איך נמצא אותו? נניח $v\in U\cap W$.

מצד אחד, $v\in U$, לכן $v=\begin{pmatrix}a\\b\\a+b\end{pmatrix}$ כלשהם $a,b\in\mathbb{R}$.

מצד שני, $v\in W$, לכן $v=\begin{pmatrix}c\\c+d\\d\end{pmatrix}$ כלשהם $c,d\in\mathbb{R}$.

נקבל מערכת משוואות:

$$\begin{cases} a=c\\ b=c+d\\ a+b=d\end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0\end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftarrow \frac{1}{2}R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2\leftarrow R_2+R_3]{R_1\leftarrow R_1+R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a=0\\ c=0\\ b=d=t\end{array}}$$

לכן הוקטור v הוא מהצורה $\begin{pmatrix}0\\t\\t\end{pmatrix}$. לכן

$$U\cap W=\left\{\begin{pmatrix}0\\t\\t\end{pmatrix} \middle| t\in\mathbb{R}\right\}$$

הגדרה:

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהיו $U,W\leq V$.

אומרים שהסכום $U+W$ הוא סכום ישר, ומסמנים $U\oplus W$,

אם לכל $v\in U+W$ קיימים $u\in U$ ו-$w\in W$ יחידים כך ש- $v=u+w$.

משפט:

$$T=U\oplus W \iff T=U+W \text{ וגם } U\cap W=\{0_V\}.$$

דוגמה:

$V=\mathbb{R}^3$, $U=\left\{\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix} \middle| a\in\mathbb{R}\right\}$, $W=\left\{\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix} \middle| b\in\mathbb{R}\right\}$.

שמו כי $U+W=\underbrace{\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}}_{T}$.

$\boxed{U+W\subseteq T}$ כי לכל $\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}\in U$ ולכל $\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}\in W$, $\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}\in T$.

$\boxed{U+W\supseteq T}$ כי לכל $\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}\in T$, $\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}=\underset{\overset{\cap}{U}}{\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}}+\underset{\overset{\cap}{W}}{\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}}\in U+W$.

בנוסף, הסכום ישר:

לכל $\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}\in T$ קיימים $u\in U$ ו- $w\in W$ יחידים כך ש- $\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}=u+w$,

כי חייבים לבחור $u=\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$, $w=\begin{pmatrix}0\\b\\0\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

לכן הסכום $U+W$ הוא ישר, ונקבל $T=U\oplus W$.

משפט:

$T=U\oplus W \iff T=U+W$ וגם $U\cap W=\{0_V\}$.

הוכחה:

$\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש- $T=U\oplus W$. לפי ההגדרה, $T=U+W$.

צ"ל $U\cap W=\{0_V\}$.

יהי $v\in U\cap W$, ונניח בשלילה $v\neq 0_V$.

$$\underset{\in U}{v}+\underset{\in W}{0_V}=v=\underset{\in U}{0_V}+\underset{\in W}{v}$$

אבל זו סתירה להצגה היחידה בסכום הישר.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח $T=U+W$ וגם $U\cap W=\{0_V\}$. צ"ל: הסכום $U+W$ ישר.

כלומר: לכל $v\in U+W$ קיימים $u\in U$ ו- $w\in W$ יחידים כך ש- $v=u+w$.

נניח שיש יותר מבחירה אחת, כלומר

$$\underset{\in U}{u_1}+\underset{\in W}{w_1}=v=\underset{\in U}{u_2}+\underset{\in W}{w_2}$$

ונראה שההצגות האלו שוות.

$$u_1+w_1=u_2+w_2$$

$$\underbrace{u_1-u_2}_{\in U}=\underbrace{w_2-w_1}_{\in W}$$

לכן הווקטור $u_1-u_2=w_2-w_1$ נמצא ב- U וגם ב- W, כלומר ב- $U\cap W$. אבל מההנחה $U\cap W=\{0_V\}$.

לכן
$$u_1-u_2=0_V,\quad w_2-w_1=0_V \Rightarrow u_1=u_2,\quad w_1=w_2.$$

$\square$

הערה:

האם אפשר להגדיר V חיסור מרחבים וקטוריים?

אם היינו מנסים כקבוצות - אי-אפשר. $0_V \notin U\backslash W$, ולכן זה לא מרחב וקטורי.

תרגיל:

מצאו דוגמה לתת-מרחבים $U,W,T\leq V$ כך ש- $U\neq W$ אבל $U+T=W+T$.

קבוצות פורשות

הגדרה:

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $S\subseteq V$ תת-קבוצה.

א. אומרים ש- $v\in V$ הוא צירוף לינארי של S אם קיימים $v_1,\dots,v_n\in S$ ו- $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ שעבורם $v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$.

ב. נגדיר את תת המרחב הנפרש ע"י S להיות

$$Span(S)=Sp(S)=Span_{\mathbb{F}}(S)=\left\{\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n \,\middle|\, n\in\mathbb{N},\ v_1,\dots,v_n\in S,\ \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}\right\}$$

כלומר זו קבוצת כל הצירופים הלינאריים של איברי S.

ג. אומרים ש- S פורשת תת-מרחב $U\leq V$ אם $U=Span(S)$.

דוגמאות:

א. $V=\mathbb{R}^2$, $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$. אז $2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של S.

גם $1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של S.

גם $1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של S.

ב. $V=\mathbb{R}_2[x]$, $S=\{1+x,1+x^2\}$.

דוגמה לצירוף לינארי:
$1\cdot(1+x)+0\cdot(1+x^2)=1+x$
$1\cdot(1+x)-1\cdot(1+x^2)=x-x^2$

הערות:

א. תמיד $0_V\in Span(S)$ (מגדירים פורמלית $Span(\phi)=\{0_V\}$).

(למה? כי אפשר לבחור $\alpha_1=\dots=\alpha_n=0_{\mathbb{F}}$)

ב. $S\subseteq Span(S)$.

טענה:

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $S\subseteq V$ תת-קבוצה.

א. $Span(S)$ הוא תת-מרחב וקטורי של V.

ב. $Span(S)$ הוא תת-המרחב הווקטורי הקטן ביותר של V שמכיל את S.

הוכחה:

א. צ"ל: $Span(S)\subseteq V$ ואת הקריטריון המקוצר.

מדוע $Span(S)\subseteq V$? צ"ל שלכל $v_1,\dots,v_n\in S$ ולכל $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$,
$\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n\in V$.

נשתמש באינדוקציה על n.

$\boxed{n=1}$ אם $v_1\in S$ ו- $\alpha_1\in\mathbb{F}$, $\alpha_1v_1\in V$ בגלל הסגירות לכפל בסקלר של V.

$\boxed{\text{צעד האינדוקציה}}$ נניח שהטענה נכונה לכל n וקטורים, ונוכיח עבור $n+1$.

יהיו $v_1,\dots,v_{n+1}\in S$, $\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\in\mathbb{F}$.

מהנחת האינדוקציה, $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \in V$.

מצד שני, $v_{n+1} \in S$ ו- $\alpha_{n+1} \in \mathbb{F}$, מהסגירות לכפל בסקלר נקבל $\alpha_{n+1} v_{n+1} \in V$,

מהסגירות לחיבור של V, $(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) + \alpha_{n+1} v_{n+1} \in V$.

לכן $\mathrm{Span}(S) \subseteq V$.

נראה ש- $\mathrm{Span}(S)$ תת-מרחב וקטורי של V לפי הקריטריון המקוצר.

(1) $0_V \in \mathrm{Span}(S)$ – כי אמרנו שווקטור האפס הוא צירוף לינארי של כל S.

(2) יהיו $u_1, u_2 \in \mathrm{Span}(S)$, ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$. צ"ל $u_1 + \alpha u_2 \in \mathrm{Span}(S)$.

נכתוב
$$u_1 = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$$
$$u_2 = \gamma_1 v_1' + \cdots + \gamma_m v_m'$$

כאשר $v_1, \ldots, v_n, v_1', \ldots, v_m' \in S$, $\beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbb{F}$. לכן

$$u_1 + \alpha u_2 = \underbrace{\beta_1 \underline{v_1} + \cdots + \beta_n \underline{v_n} + \alpha\gamma_1 \underline{v_1'} + \cdots + \alpha\gamma_m \underline{v_m'}}_{\text{צירוף לינארי של איברי } S} \in \mathrm{Span}(S)$$

מסק הם הוכחנו ש- $\mathrm{Span}(S)$ תת-מרחב וקטורי של V.

ב. צ"ל: אם $U \leq V$ תת-מרחב כך ש- $S \subseteq U$, אז $\mathrm{Span}(S) \subseteq U$.

יהי $v \in \mathrm{Span}(S)$. לכן קיימים $v_1, \ldots, v_n \in S$ ו- $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ שעבורם $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$.

$S \subseteq U$, לכן גם $v_1, \ldots, v_n \in U$, ומהסגירות של U נקבל $v \in U$.

לכן $\mathrm{Span}(S) \subseteq U$.

□

מסקנה:

אם U הוא תת-מרחב של V, אז $Span(U)=U$.

בפרט, לכל תת-קבוצה S, $Span(Span(S))=Span(S)$.

דוגמה:

איך אפשר לקבוע אם $v\in Span(S)$?

$V=\mathbb{R}^3$, $v_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$. האם $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\in Span\{v_1,v_2,v_3\}$?

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\in Span\{v_1,v_2,v_3\}$ $\Longleftrightarrow$ קיימים $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ שעבורם

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha+3\beta\\2\alpha+\beta+\gamma\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר קיבלנו מערכת משוואות

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&0&1\\2&1&1&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

$v\in Span(S)$ $\Longleftrightarrow$ למערכת הנ"ל יש פתרון.

אמרנו ש-S **פורשת** את V אם $V=\mathrm{Span}(S)$.
כלומר כל $v\in V$ הוא צירוף לינארי של איברי S.

דוגמאות:

א. הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ פורשת את $\mathbb{R}^3$.

ב. הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ פורשת את $\mathbb{R}^3$.

ג. $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ פורשת את $\mathbb{R}^3$.

ד. הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ לא פורשת את $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\notin \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ה. $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ לא פורשת את $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

ו. הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}\right\}$ לא פורשת את $\mathbb{R}^3$.

נוכיח $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\notin \mathrm{Span}(\ )$: כמו שאמרנו קודם, נשים בעמודות מטריצה ונבדוק אם יש פתרון למערכת המתאימה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\2&4&6&0\\3&6&9&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-3R_1]{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&0&0&-2\\0&0&0&-3\end{array}\right)$$

קיבלנו שורת סתירה $\Leftarrow$ אין פתרון $\Leftarrow$ הקבוצה הנתונה אינה פורשת את $\mathbb{R}^3$.

איך אפשר לדעת אם קבוצה S פורשת את V?

צריך שלכל $v\in V$ יתקיים $v\in Span(S)$.

נניח $S=\{v_1,\dots,v_k\}$. רוצים פתרון $\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=v$

עבור $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in F$.

לוקחים v כללי, כותבים את המערכת המתאימה, מדרגים.
שורת סתירה $\Leftarrow$ לא פורשת. אין שורת סתירה $\Leftarrow$ פורשת.

<u>דוגמה:</u> פולינומים ממעלה ≤ 1 מעל $\mathbb{R}$

האם $\{1+2x,3+5x\}$ פורשת את $\underset{}{\overset{=}{\mathbb{R}_1[x]}}$?

יהי $a+bx\in\mathbb{R}_1[x]$ כללי. האם קיימים $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ שעבורם

$$\alpha(1+2x)+\beta(3+5x)=a+bx$$

$$(\alpha+3\beta)+(2\alpha+5\beta)x=a+bx$$

נקבל את מערכת המשוואות

$$\begin{cases}\alpha+3\beta=a\\ 2\alpha+5\beta=b\end{cases}$$

נפתור:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&3&a\\2&5&b\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&3&a\\0&-1&b-2a\end{array}\right)$$

בצורה מדורגת ואין שורות סתירה, לכן הקבוצה פורשת.

<u>דוגמה:</u>

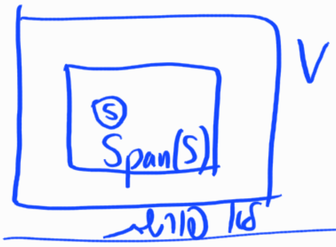
האם $\{\overset{v_1}{1+x},\overset{v_2}{x+x^2},\overset{v_3}{1-x^2}\}$ פורשת את $\mathbb{R}_2[x]$?

ניקח וקטור כללי $a+bx+cx^2\in\mathbb{R}_2[x]$. צריך לפתור את מערכת המשוואות

$$\begin{array}{c}\\ 1\\ x\\ x^2\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}v_1&v_2&v_3\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&a\\1&1&0&b\\0&1&-1&c\end{array}\right)\end{array}\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&a\\0&1&-1&b-a\\0&1&-1&c\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&a\\0&1&-1&b-a\\0&0&0&a-b+c\end{array}\right)$$

אם נבחר פולינום שעבורו $a-b+c\neq 0$, נקבל שוות סתירה.

לכן למשל $\underset{1+0x+0x^2}{\underset{\parallel}{1}} \notin \mathrm{Span}\{1+x, x+x^2, 1-x^2\}$.



תלות לינארית

מוטיבציה:

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ פורשת את $\mathbb{R}^2$.

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ פורשת את $\mathbb{R}^2$ - יש פה "וקטור מיותר". למשל

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

הגדרה:

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $S\subseteq V$ תת-קבוצה.

א. צירוף לינארי טריוויאלי של איברי S הוא צירוף לינארי מהצורה

$$0_{\mathbb{F}}v_1+0_{\mathbb{F}}v_2+\dots+0_{\mathbb{F}}v_n$$

עבור $v_1,\dots,v_n\in S$.

ב. אומרים ש-S תלויה לינארית (ת"ל) אם קיים צירוף לינארי לא טריוויאלי מתאפס של איברי S.

כלומר: קיימים $v_1,\dots,v_n\in S$ (שונים) וסקלרים $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$

כך שקיים i שעבורו $\alpha_i\neq 0$ וגם

$\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n=0_V$.

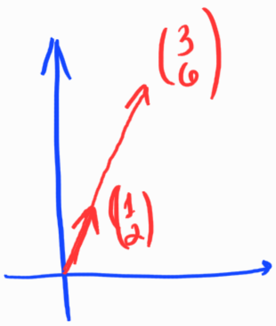
ג. אומרים ש- S היא <u>בלתי- תלויה לינארית (בת"ל)</u> אם היא לא תלויה לינארית

כלומר: הצירוף הלינארי המתאפס היחיד שלה הוא הטריוויאלי.

בנוסחה: אם $S=\{v_1,\dots,v_n\}$, אז

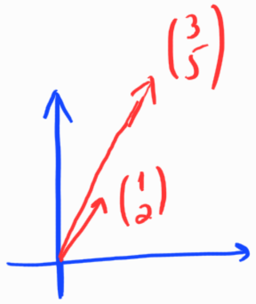
$$\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n=0_V \implies \alpha_1=\dots=\alpha_n=0_{\mathbb{F}}$$

<u>דוגמאות:</u>



א. $V=\mathbb{R}^2$, $\left\{\binom{1}{2},\binom{3}{6}\right\}$ ת"ל, כי למשל

$$3\cdot\binom{1}{2}+(-1)\cdot\binom{3}{6}=\binom{0}{0}$$



ב. $V=\mathbb{R}^2$, $\left\{\binom{1}{2},\binom{3}{5}\right\}$ בת"ל.

יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\alpha\cdot\binom{1}{2}+\beta\cdot\binom{3}{5}=\binom{0}{0}$$

צ"ל $\alpha=\beta=0$.

$$\begin{cases}\alpha+3\beta=0\\ 2\alpha+5\beta=0\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&3&0\\2&5&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&3&0\\0&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{\dots}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\end{array}\right)$$

כלומר בהכרח $\alpha=\beta=0$.

ג. $V=\mathbb{R}^3$, $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right\}$. האם S ת"ל?

יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

מפה מקבלים מערכת משוואות

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&0\\2&5&8&0\\3&6&9&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-3R_1]{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&0\\0&-3&-6&0\\0&-6&-12&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&7&0\\0&-3&-6&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

כי צורה מדורגת ויש בה משתנה חופשי $\Leftarrow$ יש אינסוף פתרונות $\Leftarrow$ הקבוצה ת"ל.

הערה:

מגדירים את ϕ להיות בת"ל (באופן ריק).

טענה:

תהי $S\subseteq V$ תת-קבוצה. אם $0_V\in S$, אז S ת"ל.

הוכחה:

הצירוף $1\cdot 0_V=0_V$ הוא צירוף לינארי מתאפס לא טריוויאלי של וקטורים מ-S.

$\square$

דוגמה:

$S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}\Leftarrow\ 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\underline{1}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

משפט:

יהיו $v_1,\dots,v_k\in\mathbb{F}^n$. $A=\begin{pmatrix}|&&|\\v_1&\cdots&v_k\\|&&|\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{n\times k}$.

$v_1,\dots,v_k$ בת"ל $\Longleftrightarrow$ למערכת $Ax=0$ יש רק הפתרון הטריוויאלי

($\Longleftrightarrow$ בצורה המדורגת של A אין משתנים חופשיים).

הוכחה:

נשים לב שלכל $\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_k\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^k$, $A\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|&&|\\v_1&\cdots&v_k\\|&&|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_k\end{pmatrix}=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k$

למה? אפשר לוודא מהגדרת הכפל ישירות.

אופציה אחרת: נסמן לכל i, $e_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\leftarrow i$, $\underbrace{A\cdot e_i = C_i(A)}$.

העמודה ה-i של A

לכן

$$A\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix} = A\cdot(\alpha_1 e_1+\dots+\alpha_k e_k)=\alpha_1 Ae_1+\dots+\alpha_k Ae_k=$$

$$=\alpha_1 C_1(A)+\dots+\alpha_k C_k(A)=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_k v_k$$

מפה

מכאן: $\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_k v_k=0 \iff A\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$.

$v_1,\dots,v_k$ בת"ל $\iff$ למערכת $A\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix}}_{x}=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_k v_k=0$ יש רק הפתרון הטריוויאלי.

$\square$

<u>מסקנה:</u>

בהינתן קבוצת וקטורים שרוצים לבדוק האם היא בת"ל, אפשר לשים את הווקטורים בעמודות מטריצה A ולדרג את A לצורה מדורגת. אם יש משתנים חופשיים - ת"ל, אחרת - בת"ל.

<u>דוגמה:</u>

$S=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. האם ת"ל?

$$\begin{pmatrix}1&4\\2&0\\3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-3R_1]{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&4\\0&-8\\0&-11\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow -\frac{1}{11}R_3]{R_2\leftarrow -\frac{1}{8}R_2}\begin{pmatrix}1&4\\0&1\\0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-R_2]{R_1\leftarrow R_1-4R_2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

אין משתנים חופשיים $\Leftarrow$ היא בת"ל.

<u>דוגמה:</u>

$S=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right\}$. האם ת"ל?

$$\overbrace{\begin{pmatrix}1&2\\2&4\\3&6\end{pmatrix}}^{A}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad \begin{aligned}\alpha+2\beta&=0\\ \alpha&=-2\beta\end{aligned}$$

יש משתנה חופשי $\Leftarrow$ ת"ל.

כל פתרון הוא מקדמים של צירוף לינארי מתאפס של S.

$\alpha=-4,\ \beta=2$

$$-4\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

משפט:

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $S\subseteq V$ תת-קבוצה. התנאים הבאים שקולים:

א. S ת"ל.

ב. קיים $v\in S$ שהוא צירוף לינארי של $S\setminus\{v\}$.

ג. קיים $v\in S$ שעבורו $\text{Span}(S\setminus\{v\})=\text{Span}(S)$.

הוכחה:

נוכיח א $\Leftarrow$ ב, ב $\Leftarrow$ ג, ג $\Leftarrow$ א.

$\boxed{\text{א} \Leftarrow \text{ב}}$ נניח ש-S ת"ל. לכן קיימים $v_1,\dots,v_n\in S$ שונים ו- $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ כך שקיים i שעבורו $\alpha_i\neq 0$ וגם

$$\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=0_V$$

$$\alpha_iv_i=-\alpha_1v_1-\dots-\alpha_{i-1}v_{i-1}-\alpha_{i+1}v_{i+1}-\dots-\alpha_nv_n \quad \Big/ \cdot\alpha_i^{-1}$$

$$v_i=-\alpha_1\alpha_i^{-1}v_1-\dots-\alpha_{i-1}\alpha_i^{-1}v_{i-1}-\alpha_{i+1}\alpha_i^{-1}v_{i+1}-\dots-\alpha_n\alpha_i^{-1}v_n$$

זה מראה ש-v_i הוא צירוף לינארי של $v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n$.
לכן v_i צירוף לינארי של $S\setminus\{v_i\}$.

$\boxed{\text{ב} \Leftarrow \text{ג}}$ נניח שקיים $v\in S$ כך ש-v צירוף לינארי של $S\setminus\{v\}$.
נראה $\text{Span}(S\setminus\{v\})=\text{Span}(S)$.

$\boxed{\subseteq}$ ברורה, כי $S\setminus\{v\}\subseteq S$.

$\boxed{\supseteq}$ יהי $w\in Span(S)$. אז קיימים $v_1,\dots,v_n\in S$, $\alpha,\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ שעבורם

$$w=\alpha v+\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n$$

אבל v צירוף לינארי של $S\setminus\{v\}$, לכן $v=\beta_1 v_1+\dots+\beta_n v_n$

ונקבל $w=(\alpha_1+\alpha\beta_1)v_1+\dots+(\alpha_n+\alpha\beta_n)v_n\in Span(S\setminus\{v\})$.

לכן $Span(S\setminus\{v\})=Span(S)$, כנדרש.

$\boxed{\text{ג} \Leftarrow \text{א}}$ נניח שקיים $v\in S$ שעבורו $Span(S\setminus\{v\})=Span(S)$. צ"ל S ת"ל.

$v\in Span(S)$, לכן $v\in Span(S\setminus\{v\})$ (מההנחה). לכן קיימים $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$, $v_1,\dots,v_n\in S\setminus\{v\}$ שעבורם

$$v=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n+(-1)\cdot v=0_V$$

וזה צירוף לינארי לא טריוויאלי מתאפס של איברי S. לכן S ת"ל. $\square$