מטריצות הפיכות

תזכורת: $A\in F^{n\times n}$ הפיכה אם קיימת $B\in F^{n\times n}$

כך ש- $AB=BA=I$

ונסמן $B=A^{-1}$

תכונות:

1. $(A^{-1})^{-1}=A$

2. אם A,B הפיכות אז $A\cdot B$ הפיכה ו- $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

וכן זה נכון ל- k מס' כלשהו

$A_1,\dots,A_k$ הפיכות אז $A_1\cdots A_k$

הכפל הוא הפיך

$$(A_1\cdots A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdots A_1^{-1}$$

3. יהיו $A,B\in F^{n\times n}$ כך ש- $A\cdot B$ הפיכה

אז A,B כל אחת מהן הפיכה בהכרח

נכון ל- k מס' כלשהו $A_1,\dots,A_k\in F^{n\times n}$

כך ש- $A_1\cdots A_k$ הפיכה

אז כל אחת מהן הפיכה בהכרח.

4. <u>לא</u> ניתן לדעת כלום על $A+B$

5. $(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}$

6. A הפיכה $\Leftrightarrow$ הצורה הקנונית של A היא I

חלק 1 - ענו על השאלה הבאה:

1. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) תהי A מטריצה ריבועית שמקיימת: A^4+A^3+A הפיכה. אזי A^3 הפיכה.

(ב) תהי $A\in \mathbb{F}^{m\times n}$ ווקטור $b\in \mathbb{F}^n$ כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון. אזי גם למערכת $Ax=2b$ אין פתרון.

(ג) תהי $A\in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה, כך ש U היא הצורה הקנונית שלה. אזי $m-1$ השורות הראשונות של U היא הצורה הקנונית של $m-1$ השורות הראשונות של A.

<u>פתרון</u>: (א) נכון. נוכיח.

$A\in \mathbb{F}^{n\times n}$

$\downarrow$

$A, A^3, A^4 \in \mathbb{F}^{n\times n}$

$\downarrow$

$\mathbb{F}^{n\times n} \ni A^4+A^3+A = A(\overbrace{A^3+A^2+I}^{B})$

זאת מט' הפיכה, לפי משפט שלמדנו אם הכפל הוא הפיך אז A, B מט' רגולרים

כלומר A ו- A^3+A^2+I הן הפיכות

כעת $A\in \mathbb{F}^{n\times n}$ רגולרית הפיכה לכן

$A\cdot A\cdot A=A^3$

גם כן הפיכה בכפל של מט' הפיכות.

(ב) נניח בשלילה ש- $Ax=2b$ קיים פתרון

את הפתרון ל- x_0 נסמן נתון ש-

$A\cdot x_0=2b$

$\downarrow$

$\frac{1}{2}A\cdot x_0=b \longrightarrow A\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2}x_0\right)}=b$

כלומר $\frac{1}{2}x_0$ הוא פתרון למערכת $Ax=b$ סתירה

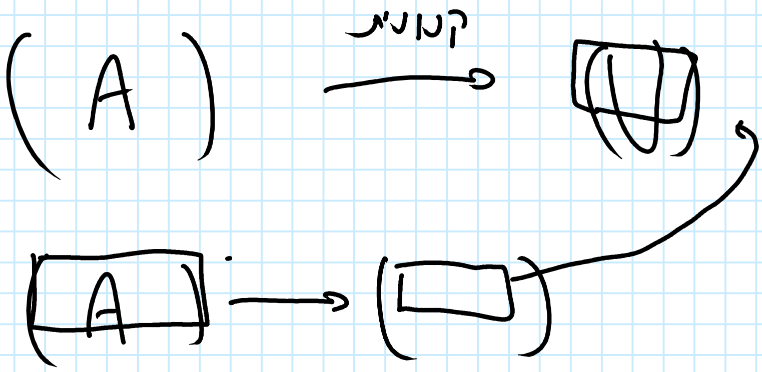
חלק 1 - ענו על השאלה הבאה:

1. הוכיחו/ הפריכו את הטענות הבאות:

(א) תהי A מטריצה ריבועית שמקיימת: A^4+A^3+A הפיכה. אזי A^3 הפיכה.

(ב) תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ווקטור $b\in\mathbb{F}^n$ כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון. אזי גם למערכת $Ax=2b$ אין פתרון.

(ג) תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה, כך שU היא הצורה הקנונית שלה. אזי $m-1$ השורות הראשונות של U היא הצורה הקנונית של $m-1$ השורות הראשונות של A.



פתרון: (ג) לא נכון שגוית

$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

אז הצורה הקנונית של A היא

$U=I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

כעת אם ניקח $m-1=1$ שורות ראשונות של A

נקבל

$A'=(1\ \ 1)\neq(1\ \ 0)=U'$

שורה ראשונה של U

צורה קנונית שגוית

הוכח / הפרכה: .. המקרי

$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}$ היא הפיכה.

לכל $B\in\mathbb{R}^{3\times3}$

$A\cdot B\neq I$

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&3\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}&&\\&&\\0&0&0\end{pmatrix}\neq I$$

תרגיל:

(א) תהי A מטריצה. נניח שאחרי ביצוע פעולות השורה הבאות:

$\rho_1 \quad R_1 \to 2R_1$

$\rho_2: \quad R_2 \to R_2 - 3R_1$

$\rho_3 \quad R_3 \longleftrightarrow R_2$

2

$\rho_4 \quad R_1 \to R_1 + R_2$

הגענו למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$. מצאו את A.

(ב) תהי B מטריצה כלשהי מגודל 3×3. נניח שאחרי ביצוע אותן פעולת שורה מסעיף א', הגענו למטריצה כלשהי C. הוכיחו שB הפיכה אם ורק אם C הפיכה.

פתרון:

א. פתרון:

$$A \underset{\xleftarrow{\rho_1^{-1}}}{\xrightarrow{\rho_1}} \cdot \underset{\xleftarrow{\rho_2^{-1}}}{\xrightarrow{\rho_2}} \cdot\cdot \underset{\xleftarrow{\rho_3^{-1}}}{\xrightarrow{\rho_3}} \cdot\cdot \underset{\xleftarrow{\rho_4^{-1}}}{\xrightarrow{\rho_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$\rho_1: \ R_1 \to 2R_1 \qquad \rho_1^{-1}: \ R_1 \to \frac{1}{2} R_1$

$\rho_2: \ R_2 - 3R_1 \qquad \rho_2^{-1}: \ R_2 + 3R_1$

$\rho_3: \ R_3 \leftrightarrow R_2 \qquad \rho_3^{-1}: \ R_3 \leftrightarrow R_2$

$\rho_4: \ R_1 + R_2 \qquad \rho_4^{-1}: \ R_1 - R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נכון אחרת לחשור את זה

$$\rho_4(I)\,\rho_3(I)\,\rho_2(I)\cdot\rho_1(I)\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&-1&3\\0&4&-5\end{pmatrix}\ \Big/\ \rho_4^{-1}I$$

כי רינוש בדולר היא כפל דמטי הפעולה

$$\rho_3(I)\,\rho_2(I)\,\rho_1(I)\,A=\rho_4^{(-1)}(I)\Big(\qquad\Big)\ \Big/\ \rho_3^{-1}$$

$$\rho_2^{-1}$$

$$\rho_1^{-1}$$

$$A=\rho_1^{-1}\rho_2^{-1}\rho_3^{-1}\rho_4^{-1}\left(\text{מטי נתונה}\right)$$

---

2. נתון:

נתון ש- $\rho_4\cdot\rho_3\cdot\rho_2\cdot\rho_1\cdot B=C$

הוכחו B הפיכה $\Leftarrow$ C הפיכה.

($\Leftarrow$) נתון B הפיכה אז C הפיכה

בכלל של מט' הפיכות

($\Rightarrow$) אם C הפיכה אז גם B הפיכה

כי $\rho_4\rho_3\rho_2\rho_1 B=C$ היא הפיכה

מרחבים וקטוריים

שדה - מספרים

מרחבים וקטוריים - וקטורים (וקטורים במישור/ מרחב)

למשל

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x,y,z \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \leftrightarrow (x,y,z)$$

על הקבוצה רצות נכנה להגדיר

1. חיבור וקטורים
2. כפל בסקלר (מספר ממשי)

הפעולות האלה צריכות לקיים הרבה תכונות

למשל

$$\forall \alpha \in \mathbb{F},\ v \in V:\ \alpha \cdot v \in V$$

דוגמאות סטנדרטיות:

1. $V = \mathbb{F}^n$ מעל $\mathbb{F}$ עם חיבור וכפל איבר איבר
2. $V = \mathbb{F}^{n \times m}$ מעל $\mathbb{F}$ עם החיבור וכפל בסקלר של המט'
3. $V = \mathbb{F}_n[x]$ מעל $\mathbb{F}$

תתי מרחבים וקטוריים

נתון ש- $(V, \mathbb{F}, +_V, \cdot_V)$ הוא מרחב וקטורי

ו- $W \subseteq V$ היא תת קבוצה של V אזי
$(W, \mathbb{F}, +_V, \cdot_V)$ הוא מרחב וקטורי עם הפעולות
של V, אז אומרים ש- W הוא תת מרחב
וקטורי של V.

משפט: כדי להוכיח ש- W הוא תת מרחב של $\underline{V}$
מספיק להוכיח ש-

1. $0 \in W$
2. $\alpha v + w \in W \; ; \; \forall \alpha \in \mathbb{F},\ v, w \in W$

דוגמאות!

1. יהי $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$ עם הפעולות הרגילות

האם $W = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ הוא תת מרחב של V

פתרון: הוא תת מרחב.

א. $0_V = (0,0) \in W$ ✓

ב. יהי $v = (x,0) \in W$, $w = (y,0) \in W$ ו- $\alpha \in \mathbb{F}$

אזי

$\alpha\cdot v+w=\alpha(x,0)+(y,0)=(\alpha x+y,0)\overset{?}{\in} W$

שייך כי $W=\{(\underset{\alpha x+y}{a},0)\mid a\in\mathbb{R}\}$

ב. $V=\mathbb{R}^2$, $\mathbb{F}=\mathbb{R}$

נניח $W=\{(x,y)\mid x\cdot y\geq 0\}$

פתרון; לא תת מרחב.

א. $(0,0)\overset{\checkmark}{\in} W$

ב. $\forall\alpha\in\mathbb{F},\ v,w\in W:\quad \alpha v+w\in W$

אם אני טוען שבכר לא נכון צריך למצוא $\alpha\in\mathbb{F},\ v,w\in W$ כך ש $\alpha v+w\notin W$

$\alpha=-1\in\mathbb{R}$

$v=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\in W$

$w=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\in W$

אז $\alpha\cdot v+w=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\notin W$

---

(3) $V=\mathbb{F}^{n\times n}$ מעל $\mathbb{F}$

$W=\{A\in V\mid tr(A)=0\}$

פתרון; תת מרחב

א. $O_{n\times n}\in W$ כי $tr(O_{n\times n})=0$

.2 $A,B\in W$ ו- $\alpha\in\mathbb{F}$. אז גם $\alpha A+B\in W$

$tr(A)=tr(B)=0$

ולכן

$$tr(\alpha A+B)=tr(\alpha A)+tr(B)=\alpha tr(A)+tr(B)=\alpha\cdot 0+0=0$$

נתון כי $A,B\in W$

לכן $\alpha A+B\in W$

.4 $V=\mathbb{F}^{n\times n}$ מעל $\mathbb{F}$, $W=\{A\in V \mid A \text{ סימטרית}\}$

פתרון; נכון:

א. $0_{n\times n}=0^t_{n\times n}$

$0\in W$

ב. $A,B\in W$ כלומר $A=A^t, B=B^t$ ו- $\alpha\in\mathbb{F}$ אז גם $\alpha A+B\in W$

ולכן $(\alpha A+B)^t=\alpha A^t+B^t=\alpha A+B$

כלומר $\alpha A+B\in W$

משמע W היא תת מרחב של V.