

## תרגיל בית 7

### שאלה 1

עבור סדרות הפונקציות הבאות מצאו את פונקציית הגבול (אם היא קיימת), וקבעו אם ההתכנסות היא נקודתית או במידה שווה.

א.  $f_n(x) = \cos^{2n}(x)$  בקטע  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

ב.  $f_n(x) = \frac{\arctan x}{n}$  ב  $R$ .

ג.  $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$  בקטע  $(0, \infty)$ .

ד.  $f_n(x) = x^n(1-x^n)$  בקטע  $[0,1]$ .

### פתרון שאלה 1

#### סעיף א

בקטע  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  מתקיים  $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ . בקטע הנ"ל ללא  $x=0$  מתקיים  $0 \leq \cos^2 x < 1$ .

נקבל עבור  $x=0$ :  $f_n(0) = \cos^{2n}(0) = 1^{2n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .

עבור  $x \neq 0$  מכיוון ש  $0 \leq \cos^2 x < 1$ :  $f_n(x) = \cos^{2n}(x) = (\cos^2 x)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

נקבל שפונקציית הגבול היא  $f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ .

קיבלנו סדרת פונקציות רציפות שמתכנסת לפונקציה לא רציפה ולכן זאת התכנסות נקודתית ולא התכנסות במידה שווה.

#### סעיף ב

$f_n(x) = \frac{\arctan x}{n}$  ופונקציית הגבול היא  $f(x) = 0$ .

נבדוק האם ההתכנסות היא במ"ש בעזרת מבחן  $\lim\text{-sup}$  ונקבל

$\sup_{x \in R} \left\{ \frac{\arctan x}{n} - 0 \right\} = \frac{\pi}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  וההתכנסות היא במ"ש.

#### סעיף ג

$f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$  ופונקציית הגבול היא  $f(x) = 0$ .

נבדוק האם ההתכנסות היא במ"ש בעזרת מבחן  $\lim\text{-sup}$  ונקבל

$\sup_{x \in (0, \infty)} \left\{ \frac{1}{nx+1} - 0 \right\} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \neq 0$ .

#### סעיף ד

$f_n(x) = x^n(1-x^n)$  ופונקציית הגבול היא  $f(x) = 0$ .

נבדוק האם ההתכנסות היא במ"ש בעזרת מבחן  $\lim\text{-sup}$  ונקבל  $\sup_{x \in [0,1]} \{x^n(1-x^n) - 0\}$

הפונקציה  $f(x) = x^n - x^{2n}$  רציפה בקטע הסגור  $[0,1]$  ולכן מקבלת בקטע מקסימום.

$f'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} \Rightarrow nx^{n-1}(1-2x^n) = 0$   
 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$  הנגזרת מתאפסת ב

$f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) = \frac{1}{4}$ ;  $f_n(0) = 0$ ;  $f_n(1) = 0$

וההתכנסות היא לא במידה שווה.

## שאלה 2

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

אם  $f_n(x)$  מתכנס במידה שווה ל  $f(x)$  בקטע  $I$  אזי  $g(x)f_n(x)$  מתכנס במידה שווה ל  $g(x)f(x)$ .

### פתרון שאלה 2

לא נכון. נבחר  $f_n(x) = \frac{1}{n}$  בקטע  $(0,1)$  שזאת סדרה שמתכנסת במידה שווה ל 0 ונבחר  $g(x) = \frac{1}{x}$  אז

$$g(x)f_n(x) = \frac{1}{nx} \text{ לא מתכנס במידה שווה.}$$

$$\sup_{x \in (0,1)} \left\{ \frac{1}{nx} - 0 \right\} = \infty \neq 0 \text{ ונקבל } \lim\text{-sup} \text{ מבחן במ"ש בעזרת מבחן } \lim\text{-sup} \neq 0$$

## שאלה 3

החליטו אם טורי הפונקציות הבאים מתכנסים נקודתית, במ"ש או מתבדרים בתחומים הנתונים:

א.  $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right)$  בתחום  $(-a, a)$ .

ב.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{e^{nx}}$  בתחום  $[0, \infty)$ .

ג.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$  בתחום  $[0, \infty)$ .

### פתרון שאלה 3

#### סעיף א

נוכיח תחילה ש  $\ln(1+x) \leq x$  בתחום  $[0, \infty)$ .

נחקור את הפונקציה  $f(x) = x - \ln(1+x)$   $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$  ז"א הנגזרת חיובית לכל

$x$  בתחום  $[0, \infty)$ .  $f(0) = 0$  ואז  $f(x) \geq 0$  לכל  $x$  בתחום  $[0, \infty)$ .

$$\ln\left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}\right) \leq \frac{x^2}{n \ln^2 n} \leq \frac{a^2}{n \ln^2 n}$$

ממבחן העיבוי נקבל שהטור  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a^2}{n \ln^2 n}$  מתכנס ולכן טור הפונקציות שלנו מתכנס במ"ש בקטע לפי

מבחן ה  $M$  של ווירשטראס.

#### סעיף ב

נסה למצוא מקסימום לפונקציה  $f(x) = \frac{x^2}{e^{nx}}$ . אם נגזור נקבל  $f'(x) = \frac{2xe^{nx} - nx^2 e^{nx}}{e^{2nx}}$ .

$$x = \frac{2}{n}, x = 0 \Leftrightarrow 2x - nx^2 = 0$$

$$f'(x) = \frac{2x - nx^2}{e^{nx}}$$

נקבל  $2 - 2nx$  ועבור  $x = \frac{2}{n}$  נקבל שהנגזרת השנייה שלילית ז"א שעבור  $x = \frac{2}{n}$  ערך הפונקציה

הוא מקסימאלי (מכיוון שהפונקציה רציפה ואין נקודות קיצון נוספות).

הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 e^2}$  מתכנס, טור הפונקציות מתכנס במ"ש לפי מבחן ה  $M$  של ווירשטראס.

#### סעיף ג

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = x \cdot \frac{1}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2} \quad \text{ולכן } \frac{1}{1+x^2} < 1 \text{ אז } x > 0$$

הטור מתכנס נקודתית ל  $\frac{1}{x}$  כאשר  $x > 0$ .

כאשר  $x = 0$  הטור מתכנס נקודתית ל 0. סה"כ הטור מתכנס נקודתית לפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

היות והפונקציות  $\frac{x}{(1+x^2)^n}$  רציפות והן מתכנסות נקודתית לפונקציה לא רציפה, ההתכנסות לא במ"ש.

#### שאלה 4

א. חשב וציין את תחום ההתכנסות  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+2}$ .

ב. חשבו את סכום הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n}$ .

#### פתרון שאלה 4

##### סעיף א

תחום ההתכנסות של הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+2}$ . נשתמש במבחן השורש  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{nx^{n+2}} = |x|$ .

תחום ההתכנסות הוא  $-1 < x < 1$ . נשים לב שאם נציב  $x = -1, x = 1$  נקבל טור מתבדר. בתחום ההתכנסות הטור מתכנס בהחלט, ולכן ניתן לשנות את סדר האיברים.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+2} &= \sum_{n=1}^{\infty} [(n+3)x^{n+2} - 3x^{n+2}] = \sum_{n=1}^{\infty} (n+3)x^{n+2} - 3 \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x (n+3)x^{n+2} &= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+3} = \frac{x^4}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (n+3)x^{n+2} = \frac{4x^3 - 3x^4}{(1-x)^2} \\ \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2} &= \frac{x^3}{1-x} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+2} = \frac{4x^3 - 3x^4}{(1-x)^2} - \frac{3x^3}{1-x} = \frac{x^3}{(1-x)^2}$$

סה"כ נקבל ש  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+2} = \frac{x^3}{(1-x)^2}$

##### סעיף ב

נסתכל על הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot x^n$  בתחום  $\left[\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right]$  ונמצא נוסחה לסכומו. נציב  $x = \frac{1}{2}$  ונקבל את הדרוש.

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

ההתכנסות בתחום הנ"ל היא במידה שווה, ולכן נקבל  $\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = \frac{-\ln(1-x)}{x} \quad \text{ולכן } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x)$$

טור הנגזרות הוא  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n-1}$  והוא מתכנס במידה שווה בקטע המדובר ולכן

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} \quad \text{כלומר} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n-1} = -\left(\frac{\ln(1-x)}{x}\right)' = \frac{1}{(1-x)x} + \frac{\ln(1-x)}{x^2}$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^n} = 2 + 2 \ln \frac{1}{2} \quad \text{ונקבל } x = \frac{1}{2}$$

### שאלה 5

עבור הטורים הבאים קבע לאילו ערכי  $x$  הטור מתכנס בתנאי\בהחלט

$$\text{א.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1-x)^n}{2n-1(1+x)}$$

$$\text{ב.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^n)}$$

### פתרון שאלה 5

#### סעיף א

$$\text{עבור } x > 0 : \frac{1-x}{1+x} < 1 \leftarrow \frac{1-x}{1+x} = \frac{1+x-2x}{1+x} = 1 - \frac{2x}{1+x}$$

$$\cdot -1 < \frac{1-x}{1+x} \leftarrow \frac{1-x}{1+x} = \frac{-1-x+2}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}$$

סה"כ קיבלנו ש  $-1 < \frac{1-x}{1+x} < 1$ . הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$  מתכנס כטור גיאומטרי.

$$\text{מכיוון ש } \left| \frac{(-1)^n (1-x)^n}{2n-1(1+x)} \right| \leq \left| \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n \right| \quad \text{נקבל שהטור} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n (1-x)^n}{2n-1(1+x)} \right| \quad \text{מתכנס.}$$

ז"א הטור שלנו מתכנס בהחלט.

$$\text{עבור } x < 0 : \frac{1-x}{1+x} = \frac{-1-x+2}{1+x} = -1 + \frac{2}{1+x}$$

$$\text{אם } -1 < x < 0 : -1 + \frac{2}{1+x} > 1 \quad \text{עבור } x < -1 : -1 + \frac{2}{1+x} < -1$$

$$\text{סה"כ נקבל } \left| \frac{1-x}{1+x} \right| > 1 \quad \text{ונקבל } \left| \frac{(-1)^n (1-x)^n}{2n-1(1+x)} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1-x}{1+x} \right| > 1 \quad \text{וממבחן השור הטור מתבדר.}$$

$$\text{עבור } x = 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \quad \text{הטור מתכנס בתנאי. על פי לייבניץ.}$$

#### סעיף ב

$$a_n = \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^n)}, a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(1+x)(1+x^2) \cdots (1+x^n)(1+x^{n+1})} \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x}{1+x^{n+1}} \right|$$

$$\text{סה"כ נקבל שלכל } x \neq -1 \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \quad \text{ולכן הטור מתכנס בהחלט לכל } x \neq -1.$$

### שאלה 6

מצא את תחום ההתכנסות עבור טורי החזקות הבאים:

$$\text{א.} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+5}{4n^2+n} \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

$$\text{ב.} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{8^n \sqrt{n}} (x-2)^{3n}$$

### פתרון שאלה 6

### סעיף א

נמצא תחילה את רדיוס ההתכנסות  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+5}{3^n(4n^2+n)}} = \frac{1}{3}$  ולכן רדיוס ההתכנסות הוא 3.

נבדוק את התכנסות הטור בקצוות:

עבור  $x = 3$  נקבל את הטור  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+5}{4n^2+n}$ . הטור חיובי וניתן להשתמש במבחן השוואה השני.

$$\text{הטור } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ מתבדר. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+5n}{4n^2+n} = \frac{1}{4} \text{ הטורים חברים.}$$

הטור  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+5}{4n^2+n}$  מתבדר.

עבור  $x = -3$  נקבל את הטור  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+5)}{4n^2+n}$ .

הטור הוא טור מתחלף כאשר  $a_n = \frac{n+5}{4n^2+n}$ . סדרה יורדת ובנוסף מתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

תנאי משפט לייבניץ מתקיימים והטור מתכנס.

תחום ההתכנסות הוא:  $-3 \leq x < 3$ .

### סעיף ב

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{8^n \sqrt{n}} (x-2)^{3n}$$

נמצא תחילה את רדיוס ההתכנסות ולכן רדיוס ההתכנסות הוא 2 ז"א הטור מתכנס כאשר

$$0 < x < 4 \Leftrightarrow |x-2| < 2$$

נבדוק את התכנסות הטור בקצוות:

עבור  $x = 4$  נקבל  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ . לכל  $n \geq 3$  מתקיים  $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ . הטור  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  מתבדר ולכן גם הטור

מתבדר.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

עבור  $x = 0$  נקבל  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$ .

הטור הוא טור מתחלף כאשר  $a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ . נשים לב ש  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

נוכיח ש  $a_n$  סדרה יורדת.

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$$

לכל  $x < e^2$  הנגזרת שלילית והפונקציה יורדת ז"א לכל  $n \geq 9$  הסדרה  $a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$  יורדת.

תנאי משפט לייבניץ מתקיימים והטור מתכנס.

תחום ההתכנסות הוא:  $0 \leq x < 4$ .