פתרון תרגיל בית 10

<u>שאלה 1:</u>

יהי X מ"ט קומפקטי. יהי $\{K_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות סגורות, כך שכל חיתוך סופי של קבוצות מאוסף זה אינו ריק. נוכיח ש $\bigcap_{i\in I} K_i \neq \emptyset$. נניח בשלילה כי $\bigcap_{i\in I} K_i = \emptyset$. עפ"י דה-מורגן נקבל כי:

$X = \emptyset^c = \bigcup_{i\in I} K_i^{\,c} = \left(\bigcap_{i\in I} K_i\right)^c$. מכיון שבנוסף $\{K_i\}_{i\in I}$ אוסף סגורות הרי ש $\{K_i^{\,c}\}_{i\in I}$ הוא כיסוי פתוח של X. X קומפקטי ולכן קיימים $i_1,....,i_n$ כך ש $\bigcup_{m=1}^{n}\left(K_{i_m}\right)^c = X$. נשתמש שוב בכלל דה מורגן ונקבל $\emptyset = \bigcap_{m=1}^{n} K_{i_m}$ ומצאנו חיתוך סופי ריק של קבוצות מהאוסף $\{K_i\}_{i\in I}$. סתירה.

<u>שאלה 2:</u>

מרחב טופולוגי X נקרא **נתרי** אם לא קיימת בו סדרה אינסופית של קבוצות סגורות A_i כך ש $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset ...$ (הכלה ממש).

הראו שכל מרחב טופולוגי נתרי הוא קומפקטי.

<u>פתרון:</u>

נשים לב שנתריות שקולה לתנאי הבא: לא קיימת בו סדרה אינסופית של קבוצות פתוחות A_i כך ש $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset ...$ (הכלה ממש).

כעת יהי $\{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של X. נבחר איבר O_{i_1} בכיסוי. אם $O_{i_1} = X$ אז סיימנו. אחרת קיים $x \in X \setminus O_{i_1}$. בהכרח קיים O_{i_2} בכיסוי כך ש $x \in O_{i_2}$. נשים לב $O_{i_1} \subset O_{i_1} \cup O_{i_2}$. אם $O_{i_1} \cup O_{i_2} = X$ אז סיימנו, אחרת קיים $x \in X \setminus (O_{i_1} \cup O_{i_2})$. נבחר O_{i_3} בכיסוי כך ש $x \in O_{i_3}$. נקבל $O_{i_1} \subset O_{i_1} \cup O_{i_2} \subset O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup O_{i_3}$. ניתן להמשיך את התהליך. אם התהליך אינו מסתיים, כלומר אם לא קיים k כך ש $O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup O_{i_3} \cup ... \cup O_{i_k} = X$, אז נקבל סדרה עולה ממש של סדרות פתוחות, ונקבל סתירה לנתריות.

שימו לב: ניתן גם לפתור בדרך דומה בעזרת תרגיל 1, ואז לא צריך לעבור לתנאי השקול לנתריות.

<u>שאלה 3:</u>

נפתור את שני הסעיפים ביחד.

$\left([1,5]\times[2,6]\right)\setminus\left((2,4)\times(3,5)\right)$ חסום וסגור ב $\mathbb{R}^2$ ולכן קומפקטי. לכן עפ"י הכללת משפט ויירשטראס לפונקציה הרציפה f קיימים מינימום ומקסימום. נניח שהמינימום a והמקסימום b. כעת, $\left([1,5]\times[2,6]\right)\setminus\left((2,4)\times(3,5)\right)$ קשיר מסילתית (בין כל שתי נקודות ניתן להעביר מסילה שהיא שרשור של מסילות סטנדרטיות) ולכן קשיר. עפ"י משפט ערך הביניים הפונקציה משיגה כל ערך בין a ל- b ובסה"כ קיבלנו כי התמונה של f שווה ל $[a,b]$ עבור a,b מסוים.

<u>שאלה 4:</u>

ניעזר בלמה שהוכחנו בתרגול (מותר להסתמך עליה בהנחה שמציינים שהוכחנו בתרגול). בשביל שלמות ההוכחה נציג גם את הוכחת הלמה.

למה: יהי (X,d) מ"מ, $A,C\subseteq X$ לא ריקות כך ש C ת"מ קומפקטי אזי: קיים $c_0\in C$ כך ש $d(C,A)=d(c_0,A)$.

הוכחת הלמה: הפונקציה $\varphi:C\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\varphi(x)=d(x,A)$ היא ליפשיץ-1 ובפרט רציפה. C קומפקטי ולכן φ מקבלת מינימום בפרט: קיים $c_0\in C$ כך ש $d(c_0,A)=\varphi(c_0)=\inf\left\{d(c,A):\quad c\in C\right\}=d(C,A)$.

מש"ל למה

נוכיח כעת שאם (X,d) מ"מ, $A,C\subseteq X$ לא ריקות C ת"מ קומפקטי, A סגורה ב X אזי:

$d(C,A)=0\Leftrightarrow C\cap A\neq\varnothing$.

הוכחה:

$(\Leftarrow)$ $d(C,A)=\inf\{d(c,a): \quad c\in C, \quad a\in A\}$. ברור ש $d(C,A)\geq 0$ מצד שני $C\cap A\neq\varnothing$ ולכן קיים $c_0\in C\cap A$ נקבל ש $0=d(c_0,c_0)\geq\inf\{d(c,a): \quad a\in A\}=d(C,A)$. בסה"כ $d(C,A)=0$.

$(\Rightarrow)$ עפ"י הלמה קיים $c_0\in C$ כך ש $d(C,A)=d(c_0,A)$. מכיון ש $d(C,A)=0$ נקבל ש $d(c_0,A)=0$ ומכאן $c_0\in cl(A)=A$ (A סגורה). לכן, $c_0\in C\cap A$ ו $C\cap A\neq\varnothing$.

<u>שאלה 5:</u>

נחלק למקרים: א) X קומפקטי. אזי מכיון ש X גם האוסדורף עפ"י הנתון נקבל ממשפט ש X הוא T_4

(המשפט: קומפקטי+ $T_2 \Rightarrow T_4$). מתקיים $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$.

ב) X קומפקטי מקומית והאוסדורף ואינו קומפקטי. ראינו שניתן לשכן טופולוגית את X במרחב X^* שהינו קומפקטי והאוסדורף (זוהי קומפקטיפיקצית הנקודה). לכן X^* מרחב $T_{3\frac{1}{2}}$ בדיוק לפי הנימוקים של מקרה א). מכיון ש X הומיאומורפי לתת מרחב של X^* ותכונת $T_{3\frac{1}{2}}$ תורשתית וגם נשמרת תחת הומיאומורפיזם נקבל ש X הוא $T_{3\frac{1}{2}}$.

הערה: למעשה, גם אם X קומפקטי והאוסדורף ניתן לשכן אותו ב X^*, רק שתמונת X אינה צפופה ב X^*. לכן אין צורך אמיתי להפריד למקרים ואפשר להתיחס רק למקרה ב.

<u>שאלה 6:</u>

א. נראה שהמשלים של $F\times G$ הינה קבוצה פתוחה. $(F\times G)^C=((X\setminus F)\times Y)\cup(X\times(Y\setminus G))$ והיא פתוחה כאיחוד פתוחות (בסיסיות).

ב. יהיו X,Y מ"ט, $A\subseteq X, B\subseteq Y$. הוכיחו כי $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$.

בכיוון הראשון: $\supseteq$

$$(a,b)\in\overline{A}\times\overline{B}\Rightarrow a\in\overline{A}, b\in\overline{B}\Rightarrow$$

לכל $U\subseteq A, V\subseteq B$ סביבות פתוחות של a,b, בהתאמה, מתקיים:

$U \bigcap A \neq \varnothing$,$V \bigcap B \neq \varnothing$.

מכאן רואים כי: $\varnothing \neq (U \bigcap A) \times (V \bigcap B) = (U \times V) \bigcap (A \times B)$. כלומר לכל $U \times V$ סביבה פתוחה

בסיסית של (a,b) מתקיים $(U \times V) \bigcap (A \times B) \neq \varnothing$ ולכן $(a,b) \in \overline{A \times B}$.

הערה: $U \times V$ היא סביבה בסיסית, ובהגדרת הסגור מספיק "לרוץ" על כל הסביבות הבסיסיות.

בכיוון השני: $\subseteq$

על פי סעיף א', $\overline{A} \times \overline{B}$ סגורה וכמו כן מתקיים $A \times B \subseteq \overline{A} \times \overline{B}$ לכן $\overline{A \times B} \subseteq \overline{A} \times \overline{B}$.

ג. מכיון ש X,Y ספרבילים אזי קיימות: A בת מניה וצפופה ב X, B בת מניה צפופה ב Y. ברור ש $A \times B$ בת מניה. כמו כן, מתקיים עפ"י סעיף ב' $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B} = X \times Y$ ולכן $A \times B$ צפופה ב $X \times Y$ בנוסף להיותה בת מניה. מכאן $X \times Y$ ספרבילי.

<u>בונוס:</u> (ראו שאלה 3 עבור הגדרת נתריות).

1. הראו שתכונת נתריות היא תורשתית.
2. הראו שמרחב נתרי האוסדורף הוא בהכרח קבוצה סופית עם הטופולוגיה הדיסקרטית.

פתרון:

1. יהי X מ"ט נתרי. יהי $A \subseteq X$. נניח בשלילה ש A איננו נתרי. אזי קיימת סדרה $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ של סגורות ב- A. לכל A_i מתאימה $C_i \subseteq X$ סגורה ב X, כך ש $A_i = C_i \cap A$. נסתכל על הסדרה $C_1 \supseteq C_1 \cap C_2 \supseteq C_1 \cap C_2 \cap C_3 \supseteq \dots$. נטען שבסדרה זו כל ההכלות הן הכלות ממש. לפי הנחה קיים $x \in A_1 \setminus A_2$, ולכן $x \notin A_2 \Rightarrow x \notin C_2 \Rightarrow x \notin C_1 \cap C_2$. כלומר $C_1 \supset C_1 \cap C_2$. ניתן להוכיח את ההמשך באינדוקציה. אם כך קיבלנו סדרה יורדת ממש $C_1 \supset C_1 \cap C_2 \supset C_1 \cap C_2 \cap C_3 \supset \dots$ של סגורות ב X בסתירה לנתריות של X.
2. יהי X מ"ט נתרי האוסדורף. כל תת-מרחב שלו נתרי לפי 1, ולכן קומפקטי לפי שאלה 2, ולכן סגור (כי תת-מרחב קומפקטי של האוסדורף הוא סגור). לכן X בעל הטופולוגיה הדיסקרטית. מרחב דיסקרטי הוא קומפקטי אם ורק אם הוא סופי.