משוואת לפלס במעגל

דוגמה:

נתונה משוואת לפלס הבאה:

$$\begin{cases}\Delta u = 0, & x^2+y^2<x+y\\ u=y^2, & x^2+y^2<x+y\end{cases}$$

נרצה לכתוב את התחום באופן ברור ולכן נבצע בשלמה לריבוע:

$$x^2+y^2<x+y$$

$$x^2-x+y^2-y<0$$

$$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2-y+\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{2}$$

קיבלנו מעגל שמרכזו ב - $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ עם רדיוס של $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

קואורדינטות לשפה:

$$x-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta)\Rightarrow x=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta)$$

$$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta)\Rightarrow y=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta)$$

נקבל:

$$u\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\theta\right)=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta)\right]^2=\frac{1}{2}\sin^2(\theta)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta)+\frac{1}{4}$$

נשתמש בזהות טריגונומטרית ש - $\sin^2(\theta)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\theta)$ לקבל:

$$u\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\theta\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta)+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta)-\frac{1}{4}\cos(2\theta)$$

כעת, נכתוב באופן כללי כי:

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]$$

ונשווה:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta)-\frac{1}{4}\cos(2\theta)=u\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\theta\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]$$

נבצע השוואת מקדמים:

$$n = 0 : a_0 = \frac{1}{2}$$

$$n = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow b_1 = 1$$

$$a_1 = 0$$

$$n = 2 : \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 a_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$$

$$b_2 = 0$$

$$\forall n \neq 0,1,2 : a_n = b_n = 0$$

נקבל:

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2} + r\sin(\theta) + \frac{1}{2} r^2 \cos(2\theta)$$

<u>קואורדינטות קרטזיות לתחום:</u>

$$x - \frac{1}{2} = r\cos(\theta)\ , y - \frac{1}{2} = r\sin(\theta)$$

$$0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\ , 0 \leq \theta < 2\pi$$

נחשב:

$$\cos(\theta) = \frac{x - \frac{1}{2}}{r}\ , \sin(\theta) = \frac{y - \frac{1}{2}}{r}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{r^2}$$

נציב במשוואה הנ"ל לקבל:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{2} + r \cdot \frac{y - \frac{1}{2}}{r} + \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{r^2} \\ &= \frac{1}{2} + y - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right] \\ &= y + \frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right] \end{aligned}$$

בדיקה:

$$u\big|_{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}} = y^2$$

<u>בשפה:</u>

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$$

נציב ונקבל:

$$u|_{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}}=y-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right]=y-\frac{1}{4}+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=y-\frac{1}{4}$$
$$=y^2-y+\frac{1}{4}=y^2$$

<u>הערה:</u>

משוואת לפלס על מעגל:

$$\begin{cases}\Delta u=0, & x^2+y^2<R^2\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=f(x,y), & x^2+y^2=R^2\end{cases}$$

(n הוא הנורמל למעגל בנקודה מסוימת).

מעבר לקואורדינטות קרטזיות:

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]$$

על השפה:

$$h(\theta)=\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R}=\sum_{n=1}^{\infty}nr^{n-1}[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]$$

$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial n}$, כלומר הנגזרת הנורמלית של u בכיון הנורמל היא נגזרת של u בכיוון של הרדיוס.

תרגול 13

משוואת לפלס במלבן

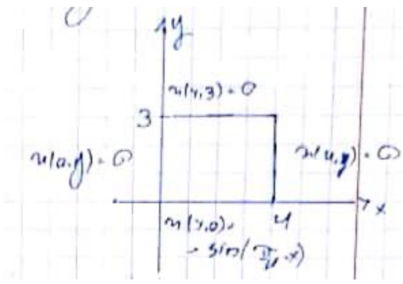
תרגיל:

פתרו את משוואת לפלס הבאה:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad 0 < x < 4\,, 0 < y < 3$$

$$\text{תנאי התחלה}\begin{cases} u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right), & 0 \le x \le 4 \\ u(x,3) = 0, & 0 \le x \le 4 \end{cases}$$

$$\text{תנאי שפה}\begin{cases} u(0,y) = 0, & 0 \le y \le 3 \\ u(4,y) = 0, & 0 \le y \le 3 \end{cases}$$



הערה:

אם יש 2 תנאים מאותו סוג (לפי x או לפי y) ששווים ל – 0, הם יהיו תנאי שפה ושני התנאים הנותרים יהיו תנאי התחלה. אז נוכל לעשות הפרדת משתנים.

⇐במקרה שלנו $u(0,y) = u(4,y) = 0$ יהיו תנאי השפה, וכן $u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$, $u(x,3) = 0$ יהיו תנאי ההתחלה.

פתרון:

נבצע הפרדת משתנים:

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

נציב תנאי שפה:

$$0 = u(0,y) = X(0)\underbrace{Y(y)}_{\neq 0} \Rightarrow X(0) = 0$$

$$0 = u(4,y) = X(4)\underbrace{Y(y)}_{\neq 0} \Rightarrow X(4) = 0$$

ניקח את הניחוש ונקיים את המד"ח:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda \\ X(0) = X(4) = 0 \end{cases}$$

אנו שמים את סימן המינוס ליד הפונקציה של y כי תנאי השפה שלנו על x.

נפתור תחילה את המשוואה עבור X:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(4) = 0 \end{cases}$$

$\lambda \leq 0$ הם מקרים טריוויאליים (בדקו!).

<u>$\lambda > 0$:</u>

$$k^2 + \lambda = 0$$

$$k = \pm i\sqrt{\lambda}$$

$$\Rightarrow X(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

נציב תנאי שפה:

$$0 = X(0) = c_1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

$$0 = X(4) = \underbrace{c_2}_{\neq 0} \sin\left(4\sqrt{\lambda}\right)$$

$$4\sqrt{\lambda} = n\pi$$

$$\boxed{\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{4}\right)^2}, \qquad n = 1,2,3,\dots$$

קיבלנו את הע"ע. מפה נקבל גם את הפ"ע:

$$\boxed{X_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)}$$

נחזור למשוואה עבור Y:

$$\frac{Y_n''(y)}{Y_n(y)} = \left(\frac{n\pi}{4}\right)^2$$

$$Y_n''(y) - \left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 Y_n(y) = 0$$

ננחש e^{ky} ונקבל:

$$k^2 - \left(\frac{n\pi}{4}\right)^2 = 0$$

$$k = \pm\frac{n\pi}{4}$$

לכן:

$$Y_n(y) = a_n e^{\frac{n\pi}{4}y} + b_n e^{-\frac{n\pi}{4}y}$$

לכן:

$$u_n(x,y) = c_n \sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)\left[a_n e^{\frac{n\pi}{4}y} + b_n e^{-\frac{n\pi}{4}y}\right] = \sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)\left[A_n e^{\frac{n\pi}{4}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{4}y}\right]$$

ואז:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)\left[A_n e^{\frac{n\pi}{4}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{4}y}\right]$$

בעזרת תנאי ההתחלה נמצא את A_n ו - B_n:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)[A_n + B_n]$$

מהשוואת מקדמים:

$$n = 1 : A_1 + B_1 = 1$$

$$\forall n \neq 1 : A_n + B_n = 0$$

מתנאי ההתחלה השני:

$$0 = u(x,3) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)\left[A_n e^{\frac{3n\pi}{4}} + B_n e^{-\frac{3n\pi}{4}}\right]$$

מהשוואת מקדמים נקבל ש:

$$\forall n : \ A_n e^{\frac{3n\pi}{4}} + B_n e^{-\frac{3n\pi}{4}} = 0$$

<u>הערה תוך תרגיל:</u>

כל תנאי התחלה נותן משוואה אחת עם 2 נעלמים. כדי למצוא את המקדמים נצטרך להרכיב מספר משוואות באופן הבא:

מכל תנאי ניקח משוואה אחת עבור ה – n הספציפי ואז נקבל מערכת של 2 משוואות עם 2 נעלמים!

<u>המשך התרגיל:</u>

<u>נחלק למקרים:</u>

$$\forall n \neq 1 : \begin{cases} A_n + B_n = 0 \\ A_n e^{\frac{3n\pi}{4}} + B_n e^{-\frac{3n\pi}{4}} = 0 \end{cases}$$

נסתכל על הדטרמיננטה:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{3n\pi}{4}} & e^{-\frac{3n\pi}{4}} \end{vmatrix} = e^{-\frac{3n\pi}{4}} - e^{\frac{3n\pi}{4}} \neq 0$$

ולכן עבור $n \neq 1$, הדטרמיננטה שונה מאפס ולכן נקבל רק פתרון טריוויאלי:

$$A_n = B_n = 0$$

עבור $n = 1$:

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = 1 \\ A_1 e^{\frac{3\pi}{4}} + B_1 e^{-\frac{3\pi}{4}} = 0 \end{cases}$$

אם נסתכל על הדטרמיננטה:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{3n\pi}{4}} & e^{-\frac{3n\pi}{4}} \end{vmatrix} = e^{-\frac{3n\pi}{4}} - e^{\frac{3n\pi}{4}} = -2\sinh\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

הדטרמיננטה שונה מאפס ולכן יש פתרון יחיד. ניעזר בכלל קרמר:

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & e^{-\frac{3n\pi}{4}} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{-2\sinh\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$B_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{3n\pi}{4}} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{2\sinh\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$

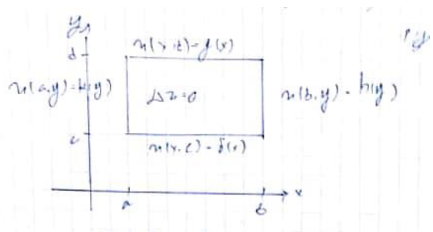
לכן:

$$\boxed{u(x,y)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{4}x\right)\left[A_n e^{\frac{n\pi}{4}y} + B_n e^{-\frac{n\pi}{4}y}\right]$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\left[\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{-2\sinh\left(\frac{3\pi}{4}\right)} e^{\frac{\pi}{4}y} + \frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{2\sinh\left(\frac{3\pi}{4}\right)} e^{-\frac{\pi}{4}y}\right]$$
$$= \boxed{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\sinh\left(\frac{\pi}{4}(3-y)\right)}{\sinh\left(\frac{3\pi}{4}\right)}}$$

■

<u>הערה:</u>

במידה ושני התנאים מאותו סוג (לפי y או לפי x) ולפחות אחד מבין 2 התנאים לא אפס, אז לא נוכל לעשות מיד הפרדת משתנים.



תרגול 13

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & a<x<b, c<y<d \\ u(x,c)=f(x), & a\le x\le b \\ u(x,d)=g(x), & a\le x\le b \\ u(a,y)=k(y), & c\le y\le d \\ u(b,y)=h(y), & c\le y\le d \end{cases}$$

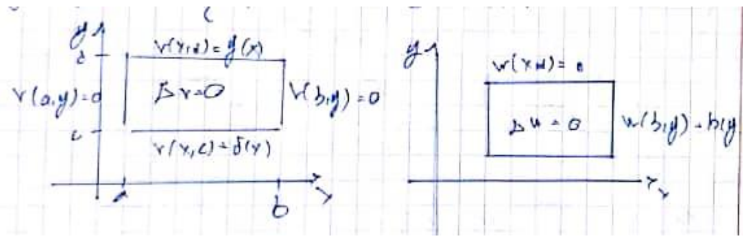
נגדיר:

$$u=v+w$$

כאשר v הרמונית ו – w הרמונית $\Leftarrow$ u הרמונית.

נקבל 2 מערכות חדשות:

$$\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=0 \\ v(a,y)=0 \\ v(b,y)=0 \\ v(x,c)=f(x) \\ v(x,d)=g(x) \end{cases}, \begin{cases} w_{xx}+w_{yy}=0 \\ w(a,y)=k(y) \\ w(b,y)=h(y) \\ w(x,c)=0 \\ w(x,d)=0 \end{cases}$$



<u>תנאי תואמות:</u>

$$v(a,c)=0\,, v(a,c)=f(a) \Rightarrow \boxed{f(a)=0}$$

$$v(a,d)=0\,, v(a,d)=g(a) \Rightarrow \boxed{g(a)=0}$$

$$v(b,c)=0\,, v(b,c)=f(b) \Rightarrow \boxed{f(b)=0}$$

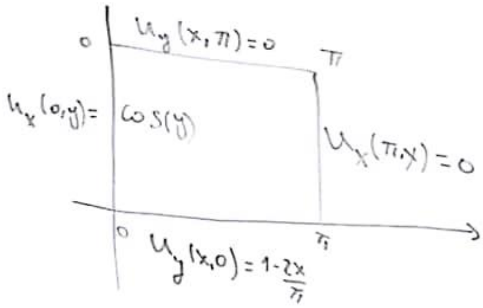
$$v(b,d)=0\,, v(b,d)=g(b) \Rightarrow \boxed{g(b)=0}$$

בדומה גם עבור h,k:

$$\boxed{h(c)=k(c)=h(d)=k(d)=0}$$

<u>דוגמה:</u>

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & 0<x,y<\pi \\ u_y(x,0)=1-\dfrac{2x}{\pi}, & 0\le x\le \pi \\ u_y(x,\pi)=0, & 0\le x\le \pi \\ u_x(0,y)=\cos(y), & 0\le y\le \pi \\ u_x(\pi,y)=0, & 0\le y\le \pi \end{cases}$$



נגדיר $u=v+w$ כאשר v,w הרמוניות:

$$\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=0, \quad 0<x,y<\pi \\ \text{תנאי שפה}\begin{cases} v_y(x,0)=0, \quad 0\le x\le \pi \\ v_y(x,\pi)=0, \quad 0\le x\le \pi \end{cases} \\ \text{תנאי התחלה}\begin{cases} v_x(0,y)=\cos(y), \quad 0\le y\le \pi \\ v_x(\pi,y)=0, \quad 0\le y\le \pi \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{xx}+w_{yy}=0, \quad 0<x,y<\pi \\ \text{תנאי התחלה}\begin{cases} w_y(x,0)=1-\dfrac{2x}{\pi}, \quad 0\le x\le \pi \\ w_y(x,\pi)=0, \quad 0\le x\le \pi \end{cases} \\ \text{תנאי שפה}\begin{cases} w_x(0,y)=0, \quad 0\le y\le \pi \\ w_x(\pi,y)=0, \quad 0\le y\le \pi \end{cases} \end{cases}$$

<u>נפתור את v:</u>

נבצע הפרדת משתנים:

$$v(x,y)=X(x)Y(y)$$
$$v_y(x,y)=X(x)Y'(y)$$

נציב תנאי שפה:

$$0=v_y(x,0)=X(x)Y'(0)\Rightarrow \boxed{Y'(0)=0}$$
$$0=v_y(x,\pi)=X(x)Y'(\pi)\Rightarrow \boxed{Y'(\pi)=0}$$

<u>ניקח את הניחוש ונקיים את המד"ח:</u>

$$\begin{cases} -\dfrac{X''}{X}=\dfrac{Y''}{Y}=-\lambda \\ Y'(0)=Y'(\pi)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{Y''}{Y}=-\lambda \\ Y'(0)=Y'(\pi)=0 \end{cases}$$

כלומר:

$$\begin{cases} Y''+\lambda Y=0 \\ Y'(0)=Y'(\pi)=0 \end{cases}$$

נחלק למקרים:

<u>:$\lambda = 0$</u>

$$\begin{cases} Y'' = 0 \\ Y'(0) = Y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

נקבל:

$$Y(y) = c_0 y + d_0$$

נציב תנאי שפה:

$$0 = Y'(0) = Y'(\pi) = c_0 \Rightarrow \boxed{c_0 = 0}$$

$$\boxed{Y_0(y) = d_0}$$

<u>:$\lambda < 0$</u>

טריוויאלי (בדקו זאת!).

<u>:$\lambda > 0$</u>

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 \\ Y'(0) = Y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k^2 + \lambda = 0$$

$$k = \pm i\sqrt{\lambda}$$

לכן:

$$Y(y) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda} y\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda} y\right)$$

וממשיכים כמו שאנחנו יודעים (תרגיל נוסף באותו החומר מופיע בתרגול הבא) ...