0807-1

8/7/2020

הרצאה 2

תזכורת: פסוקים, פרדיקטים

שלילת כמתים: $\forall$, $\exists$

$$\neg\left(\forall x\, \underbrace{\varphi(x)}_{\text{פרדיקט}}\right) \leftrightarrow \exists x\left(\neg\varphi(x)\right)$$

$$\neg\left(\exists x\, \varphi(x)\right) \leftrightarrow \forall x\left(\neg\varphi(x)\right)$$

אינדוקציה: כד' להוכיח פרדיקט על $\mathbb{N}$, מ"ל:

(1) $\varphi(1)$ True

(2) $\varphi(n) \rightarrow \varphi(n+1)$ (לכל n)

הערה: אקסיומה - עקרון הסדר הטוב קובע כי בכל קבוצה לא ריקה של מס' טבעיים קיים מספר קטן ביותר.

בהינתן עקרון הסדר הטוב, ניתן להוכיח את משפט האינדוקציה:

הוכחה: נניח φ פרדיקט, המקיים:

(1) $\varphi(1)$ True

(2) $\varphi(n) \rightarrow \varphi(n+1)$ True

נניח בשלילה כי $\varphi(n)$ אינו True לכל $n \in \mathbb{N}$.

כלומר: קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $\varphi(n)$ False.

ולכן קבוצת המס' הטבעיים שעבורם $\varphi(n)$ False.
קבוצה זו אינה ריקה, ולכן מעקרון הסדר הטוב
יש בה איבר קטן ביותר, נסמנו m. ($\varphi(m)$ False)

$m\neq 1$: כי ידוע $\varphi(1)$ True.

$m-1\in\mathbb{N}$. מכיוון ש-m מינימלי בקב' המס' שעבורם
$\varphi(n)$ False, נקבל כי $\varphi(m-1)$ True.

מההנחה (2), $\varphi(n)\to\varphi(n+1)$ ולכן עבור $n=m-1$,
נקבל: $\varphi(m)=\varphi(\underbrace{(m-1)}_{n}+1)$ גם True, סתירה.
מ.ש.ל.

תזכורת: פרדיקט הוא פונקציה המקבלת משתנה (או משתנים) ומחזירה ערך אמת T/F.

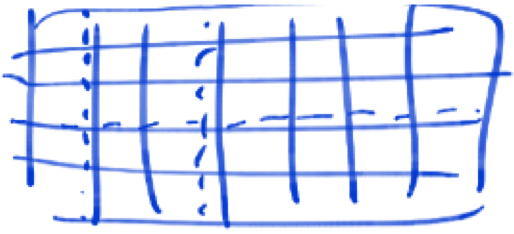
$$\varphi(x) = x<2$$
$$\varphi(x,y) = x<y$$
$$\varphi(x,y,z) = \exists z\,(x<z<y)$$
$$\varphi(1,3)=\text{True}, \quad \varphi(1,2)=\text{False}$$

אינדוקציה שלמה

שיטת הוכחה שבה אנו מוכיחים: $\varphi(1)$ True
כדי להוכיח ש- $\varphi(n+1)$, אנו מניחים:

$\varphi(1),\dots,\varphi(n)$ True.

דוגמה: (טבלת שוקולד)
תהא טבלת שוקולד בגודל $n\times m$ משבצות.



בכל שלב, מותר לחתוך או לאורך או לרוחב.
הוכיחו כי על מנת לפרק את הטבלה לקוביות בודדות נדרשים בדיוק $\underline{nm-1}$ חיתוכים.

$$\underbrace{(n-1)}_{\text{שורות}} + n\cdot(m-1) = nm - n + n - 1 = nm-1$$

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה שלמה על גודל הטבלה.
עבור $nm=1$, הטענה טריוויאלית.

נניח שלפנינו טבלה בגודל $n\times m$, נניח שהוכחנו כי נדרשים $kl-1$ חיתוכים לטבלה בגודל $k\times l$ לכל $kl<nm$.

נניח כי יש סדרה של d חיתוכים של הטבלה לקוביות. <u>החיתוך הראשון</u> מפרק את הטבלה ל-2 טבלאות:

(1) $\overbrace{(n-k)\times m}, \overbrace{k\times m}$ $(k\le n)$

(2) $\overbrace{n\times(m-k)}, \overbrace{n\times k}$ $(k\le m)$

בה"כ

מהנחת האינדוקציה, כדי לפרק את הטבלאות שקיבלנו לקוביות נדרשים:

(1) $(km-1)+((n-k)m-1) =$

$\dots = nm-2$

$= \cancel{k}m - 1 + nm - \cancel{k}m \ldots$

(11)

$$(nk-1) + \left(n(m-k) - 1\right) =$$

$$= \cancel{n}k - 1 + nm - \cancel{n}k - 1 = \underline{nm-2}$$

לסיום, $d = 1 + (nm-2) =$

$= \underline{nm-1}$ כנדרש. מ.ש.ל.

<u>הערה מסכמת:</u> באינדוקציה (רגילה) אנו מניחים נכונות עבור n ומוכיחים עבור $n+1$.

באינדוקציה שלמה, כדי להוכיח את $\underline{n+1}$, מניחים:

$n, n-1, \ldots, 1$

כמובן, חייבים להוכיח - בכל מקרה - את בסיס האינדוקציה!!!

<u>דוגמה</u> - מספרי פיבונאצ'י:

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

$$\underbrace{F_1 = 1, \quad F_2 = 1,} \qquad \underbrace{F_{i+1} := F_i + F_{i-1}}$$

<u>טענה</u> (משפט צקנדורף) (נוסח חשב. של):

לכל מס' טבעי $n \in \mathbb{N}$ ניתן להציג כסכום של מספרי פיבונאצ'י שונים זה מזה:

$$\left[\quad n = F_{k_1} + \cdots + F_{k_d} \qquad \left(= \sum_{i=1}^{d} F_{k_i}\right)\right.$$

$k_1, \ldots, k_d$ שונים זה מזה.

<u>דוגמה:</u>

$$6 = 3 + 2 + 1 = F_4 + F_3 + F_2$$

$$19 = 13 + 5 + 1 = F_7 + F_5 + F_2$$

$\ldots$

$$\left[\; n = \underbrace{F_t + \cdots + F_1}_{n \text{ כמויים}} \;\right]$$

דרשנו שהאינדקסים $k_1,\dots,k_d$ שונים זה מזה:

הוכחה: [באינדוקציה שלמה]

* בסיס האינדוקציה ~ $n=1=F_1$.
* צעד האינדוקציה – נניח כי הוכחנו לכל $1,2,\dots,n$ ונוכיח עבור $n+1$.

①: $n+1$ הוא מס' פיבונאצ'י. סיימנו: $n+1=F_k$.

אחרת:

②: $n+1$ איננו מס' פיבונאצ'י. לכן:

$$\boxed{F_i < n+1 < F_{i+1}} \quad (*) \quad (\text{לאיזשהו } i).$$

נסמן: $m := n+1-F_i$. m הוא מס' טבעי, וכן

$$m=(n+1)-F_i \underset{\forall i,\ F_i \ge 1}{\le} n.$$

לכן מהנחת האינדוקציה השלמה ניתן להניח כי את m ניתן להציג כסכום של מספרי פיבונאצ'י שונים:

$$m = F_{k_1}+\dots+F_{k_d}$$

עבור $k_1,\dots,k_d$ שונים זה מזה.

כעת נציג את $n+1$ באופן:

$$n+1 = \underbrace{(n+1) - F_i}_{m} + F_i = m + F_i =$$

$$= F_{k_1} + \dots + F_{k_d} + F_i$$

עלינו להוכיח כי $i \notin \{k_1, \dots, k_d\}$ [כי אנו רוצים להוכיח שההצגה היא קצרה עם פיבונאצ'י שונים בזוג'.]

בשלילה, אם F_i מופיע בהצגה של m, בפרט:

$$\underbrace{n+1-F_i} = \underbrace{m \ge F_i}$$

כלומר:

$$\underbrace{n+1} \ge \underbrace{2F_i} =$$

$$= F_i + F_i \ge \underbrace{F_i + F_{i-1}} = F_{i+1}$$

מהגדרת מס' פיבונאצ'י

קיבלנו:

$$n+1 \ge F_{i+1}$$

בסתירה לתנאי המינ' של (*). לכן F_i אינו מופיע בהצגה של m, ולכן ההצגה:

$$n+1 = \overbrace{F_{k_1} + \dots + F_{k_d}}^{m} + F_i$$

היא הצגה חוקית, כנדרש.

מ.ש.ל.

הערה: "הצעה": $n=1$ ברור

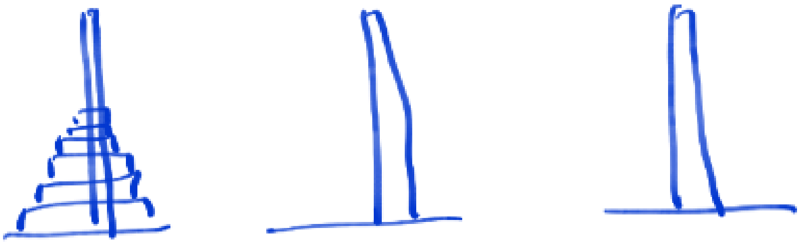
$n+1$:

$$n = F_{k_1} + \dots + F_{k_d}$$

$$n+1 = F_{k_1} + \dots + F_{k_d} + \overset{F_1}{1}$$

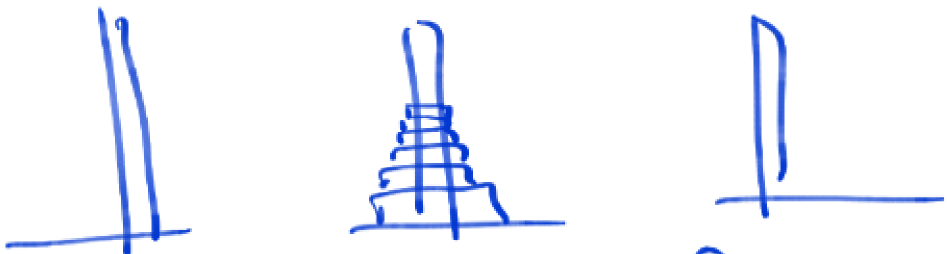
לא עובד! כי יתכן ש- $t \in \{k_1, \dots, k_d\}$, כבר השתמשנו בו! ואנחנו רוצים להוכיח הצגה בעזרת מספרי פיבונאצ'י שונים.

דוגמה - "מגדלי האנוי"



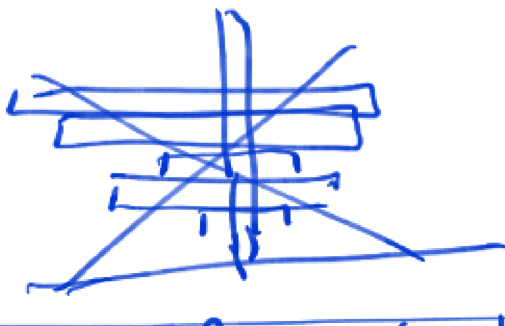
n דיסקים בגדלים שונים זה מזה

המטרה: להגיע למצב:



כולם מסודרים בעמוד אחר.

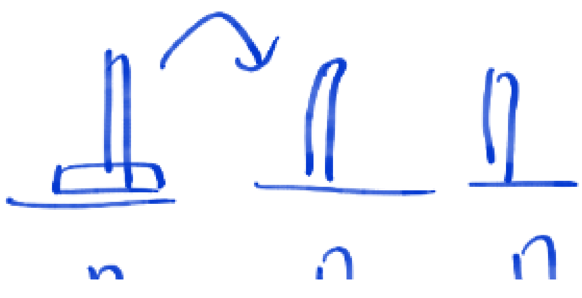
החוקים: בכל שלב מותר להעביר דיסק אחד, ואסור להניח דיסק על דיסק <u>קטן</u> ממנו:

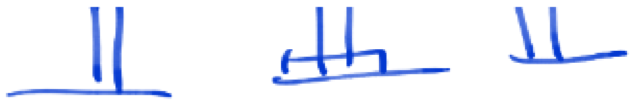


טענה: ניתן לפתור את המשחק.

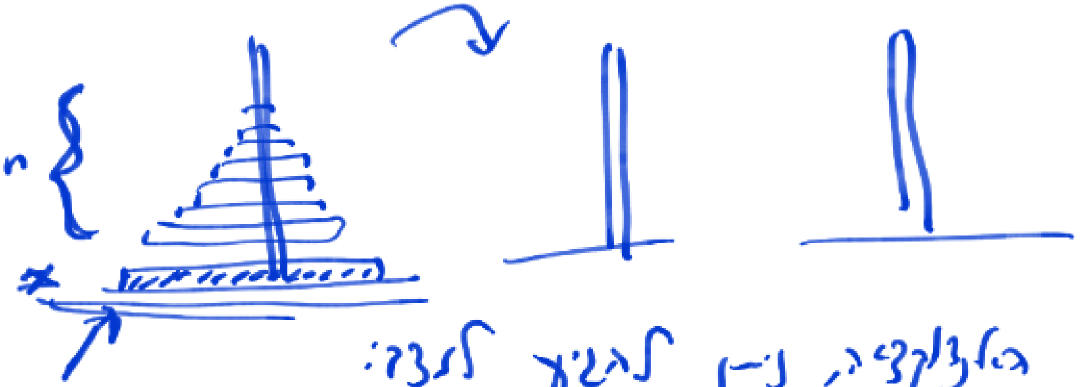
הוכחה: באינדוקציה על מספר הדיסקים במשחק.

$n=1$: טריוויאלי:





מצב חוקי הכולל את המשחק.



$n+1$:

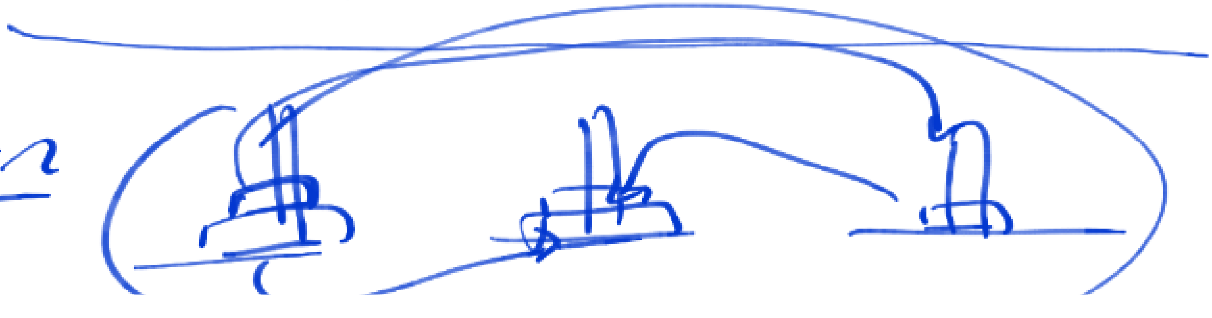
מהנחת האינדוקציה, ניתן להגיע למצב:

(א)

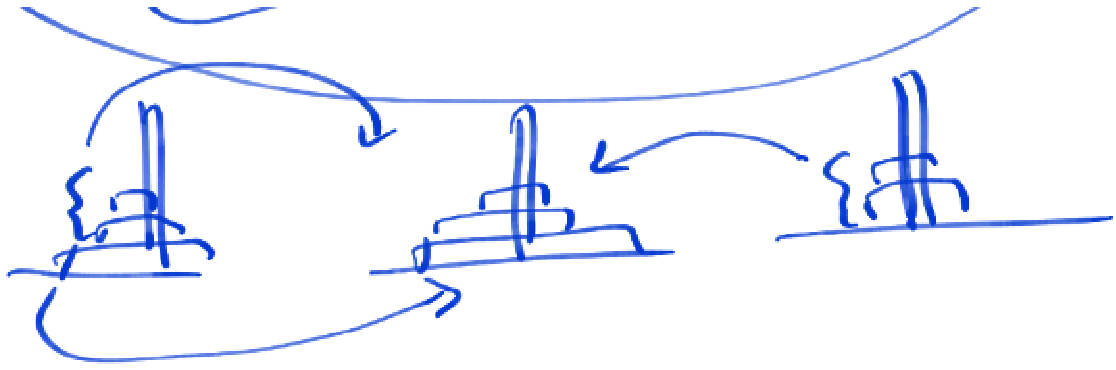
אפשר לעבור את כל המצבים שיצאנו עבור n דיסקיות כדי להגיע למצב זה.
אין עוד צעדים חוקיים, מכיוון שבדיסק התחתון לא נגענו.

נגמור את המשחק: נעביר את הדיסקית האחרונה למוט השלישי, ונחזור על הפעולה:

$n=2$



$n=3$



...

נושא חדש - מבוא לתורת הקבוצות

$A=\{1,2,3\}$ קב' שאבריה $1,2,3$.

$1 \in A$ שייך

$5 \notin A$ אינו שייך

פרדוקס ראסל: תהא A קבוצת כל הקבוצות שאינן שייכות לעצמן.

דוגמה לכך שיתכן שקב' יכולה לשמש כאבר בקב' אחרת:

$$\{2\} \in \{1,\{2\},3\} \qquad (\{1\}\notin)$$

הקב' $\{2\}$ שייכת, כאבר, ל- $\{1,\{2\},\{3\}\}$.

מה הפרדוקס? האם $A \in A$?

- אם $A \in A$, אז מהגדרת A, $A \notin A$.
- אם $A \notin A$ אז מהגדרת A, $A \in A$.

סתירה בכל מקרה!

פתרון לפרדוקס: A קיימת ...

[illegible] פשוט אינה קבוצה. [מחלקה - class
היא "גדולה" מכדי להיות קבוצה.]

איסור הרשת: לא $\exists$ דבר שאפשר להגדיר הכל קבוצה.

15^{50}

הגדרת קבוצות באמצעות כמתים לוגיים

$$\mathbb{C} = \{ z \mid \exists x,y \in \mathbb{R} : z = x + iy \}$$

$$\mathbb{Q} = \{ q \mid \exists n,m \in \mathbb{Z} : m \neq 0 \wedge q = \tfrac{n}{m} \}$$

$$\text{אי-רציונ'} = \{ r \mid r \in \mathbb{R} \wedge \neg (\exists n,m \in \mathbb{Z} : m \neq 0 \wedge r = n/m) \}$$

הכלת קבוצות: $A \subseteq B$ אם:

$$\forall a \in A : a \in B$$
$$(a \in A) \longrightarrow (a \in B)$$

דוגמה: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$.

הוכחה: יהי $n \in \mathbb{N}$. אזי ניתן להציג: $n = \frac{n}{1} \in \mathbb{Q}$.

תרגיל: $X := \{ r \mid r \in \mathbb{R} \wedge r^2 \in \mathbb{Q} \}$.

$$\mathbb{Q} \subsetneq X \subsetneq \mathbb{R} \qquad \left(\begin{matrix} \mathbb{Q} \neq X \\ \mathbb{R} \neq X \end{matrix} \right)$$

שאלה קל: הכלה B-כיוונית

$(a\in A)\leftrightarrow(a\in B)$, $A\subseteq B \wedge B\subseteq A$

$\Leftarrow$ $\mathbb{Q}\subseteq X$. יהי $q\in\mathbb{Q}$, עלינו להראות כי:

$q\in\mathbb{R} \wedge q^2\in\mathbb{Q}$.

כדי להוכיח $\mathbb{Q}\neq X$ מספיק להראות איבר אחד
שייך ל-X אך לא ל-$\mathbb{Q}$. לדוגמה, $\sqrt{2}$.

כדי להוכיח $\mathbb{R}\neq X$ מספיק להראות איבר אחד
שייך ל-$\mathbb{R}$ אך לא ל-X. $x=\sqrt[4]{2}$

$x^2=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\Rightarrow x\notin X$.

ייצוג:

$a\notin A$

$A\nsubseteq B$ אם לא מתקיים $A\subseteq B$:

$\neg(a\in A\to a\in B)\leftrightarrow\exists a(a\in A\wedge a\notin B)$

דוגמה:

$\{3\}\in\underbrace{\{1,2,\{3\}\}}_{A}$

$\{3\}\nsubseteq A$ כי $3\in\{3\}$

אבל $3\notin A$!

מצד שני, $\overbrace{\{1,2\}}^{B}\subseteq A$

כל $b\in B$, מתקיים $b\in A$:

$1\in A$
$2\in A$

אבל $B\notin A$!

הקבוצה הריקה: $\emptyset$

True

$\emptyset\subseteq A$ לכל A קבוצה.

$$\big((x\in A)\vee(x\notin\emptyset)\big)\iff(x\in\emptyset\rightarrow x\in A)$$

$$\left[Q\vee(\neg P)\iff P\rightarrow Q\right]$$:כי

דוגמאות:

- $\emptyset\notin\{1,2\}$
- $\emptyset\in\{\underbrace{\emptyset,\{1,\emptyset\}}_{\emptyset\ ,\ \{1,\emptyset\}}\}$

$\emptyset\in\{1,\{1,\emptyset\}\}$

$x\notin\emptyset$

$\neg(x\in\emptyset)$

$$\forall x\,(x\notin\emptyset)\iff\overbrace{\neg\big(\underbrace{\exists x(x\in\emptyset)}_{\text{False}}\big)}^{\text{true}}$$

שייך $\in$

מוכל $\subseteq$

$\{1\}\subseteq\{1,2\}$

$\{1\}\notin\{1,2\}$

טענה: ① אם A קבוצה כך ש- $A\subseteq\emptyset$ אזי $A=\emptyset$.

② לכל קבוצה B מתקיים: $B\subseteq B$.

הוכחות:

① עלינו להוכיח כי $A=\emptyset$ כלומר אין בה איברים, כלומר: $\forall x: x\notin A$.

בשלילה, נניח כי $\exists x: x\in A$. וגם $A\subseteq\emptyset$, לכן מהגדרת ההכלה: $x\in\emptyset$, בסתירה לכך שהקבוצה הריקה אינה מכילה אף איבר!

$$\neg(\exists x: x\in A)=\forall x: x\notin A$$

כלומר

... אז ריקה.

② תהא B קבוצה. $(b\in B)\to(b\in B)$

טאוטולוגיה. $(\cdot\ p\to p)$

הגדרה: $A\subseteq B$: A הינה תת-קבוצה של B.

דוגמא:

$$A=\{x \mid \exists n\in\mathbb{N}: x=n^2-2\}$$
$$B=\{x \mid x \text{ אינו מתחלק ב-4 ללא שארית}\}$$

הוכיחו כי $A\subseteq B$.

הוכחה: יהי $a\in A$. מהגדרת A, קיים $n\in\mathbb{N}$:
$$a=n^2-2$$

נפצל למקרים:

① n זוגי: $n=2k$ אזי:
$$a=\underbrace{4k^2}_{\text{מתחלק ב-4}}-2$$
אם גם $4|a$ אז $4|-2$, סתירה.

② n אי-זוגי: $n=2k+1$:
$$a=(2k+1)^2-2=4k^2+4k+1-2=$$
$$=\underbrace{4k^2+4k}_{\text{מתחלק ב-4}}\underbrace{-1}_{\text{לא}}$$
ולכן שלם, לא מתחלק כי $4|a$. מ.ש.ל.

$B\nsubseteq A$. לדוגמה: $6\in B$

$. \; 6 \notin A$

דוגמה נוספת:

$$A = \{x \mid \exists n \in \mathbb{N}: \; x = 4n-3\}$$

$$B = \{x \mid \underbrace{(\text{אי-זוגי } x)}_{1} \wedge \underbrace{(4 \mid x^2 - x)}_{2}\}$$

(מתחלק ב-4 ללא שארית)

$$A = \{1, 5, 9, 13, 17, \dots\}$$

הוכיחו כי $A=B$.

הוכחה: הכלה דו״כ.

$A \subseteq B$: יהי $a \in A$. נכתוב:

$$a = 4n-3$$

כדי להראות ש- $a \in B$:

1. a אי״ז: $4n$ זוגי, 3 אי״ז.
2. $4 \mid a^2 - a$:

$$a^2 - a = (4n-3)^2 - (4n-3) =$$
$$= 16n^2 - 24n + 9 - 4n + 3 =$$
$$= 16n^2 - 28n + 12$$

מתחלקים ב-4 ללא שארית.

$B \subseteq A$: יהי $b \in B$. ידוע כי: (א)

1. b אי״ז ולכן קיים $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{b = 2n-1}$
2. $4 \mid b^2 - b$

$$b^2 - b = (2n-1)^2 - (2n-1) = 4n^2 - 4n + 1 - 2n + 1 =$$

$$= \underbrace{(4n^2-4n)}_{\text{מתחלק ב-4}} - \underbrace{(2n-2)}$$

לכן $2n-2$ מתחלק ב-4.

$2n-2 = 4k$: $k \in \{0,1,2,\dots\}$

$\iff n-1 = 2k$

$\boxed{n=2k+1}^{(**)}$ אי-זוגי.

עכשיו נוכיח כי $b\in A$. עלינו להראות:

$$\exists\, m\in\mathbb{N}:\ b = 4m-3$$

$$b \overset{(*)}{=} 2n-1 \overset{(**)}{=} 2(2k+1)-1 =$$
$$= 4k+1 = 4(k+1)-3$$

[במקרה הזה $m = k+1 \in \mathbb{N}$.]

לכן $b\in A$, כנדרש.

הוכחנו הכלה דו"צ $A\subseteq B \wedge B\subseteq A$

ולכן $A=B$.

מ.ש.ל.

פעולות על קבוצות

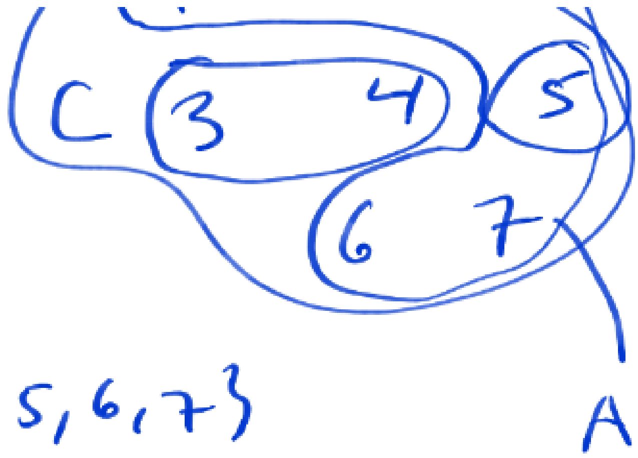
נניח כי $A,B\subseteq U$. נגדיר:

איחוד $A\cup B := \{x\in U \mid x\in A \vee x\in B\}$

חיתוך $A\cap B := \{x\in U \mid x\in A \wedge x\in B\}$

משלים (ל-U) $A^c = \overline{A} := \{x\in U \mid x\notin A\}$

הפרש קבוצות $A\setminus B := \{x\in U \mid x\in A \wedge x\notin B\}$



$$A=\{5,6,7\}$$
$$B=\{1,2,5\}$$

$$A\cup B=\{1,2,5,6,7\}$$
$$A\cap B=\{5\}$$
$$A^c=\{1,2,3,4\}$$
$$A\setminus B=\{6,7\}$$

$A\cap C=\emptyset$.

$B\cap C=\emptyset$.

<u>הערה</u>: נאמר כי שתי קבוצות הן <u>זרות</u> אם $A\cap B=\emptyset$.

<u>הגדרה</u>: הפרש סימטרי: $A \triangle B$:

$$A\triangle B:=\{x\in U \mid x\in A \text{ XOR } x\in B\}=$$
$$=\{x\in U \mid (x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in B\wedge x\notin A)\}=$$
$$=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=$$
$$=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

$$\{x\in U \mid (x\in A\cup B)\wedge(x\notin A\cap B)\}=$$

<u>הערה</u>: ניתן לראות שוויון זה בעזרת טבלת אמת למקרים:

	$x\in A$ XOR $x\in B$	$x\in A$	$x\in B$
	F	T	T
$A\triangle B$	T	F	T

T	T	F
F	F	F

$\overbrace{(x\in A\cup B)}^{T}\wedge\overbrace{(x\notin A\cap B)}^{T}$	$x\in A$	$x\in B$
F	T	T
T	F	T
T	T	F
F	F	F

משפט: [כללי דה-מורגן לקבוצות] $A,B\subseteq U$

(1) $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$

(2) $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$

הוכחה:

(1) הכלה דו״כ.

($\subseteq$) יהי $x\in(A\cup B)^c$. אזי:

$$\neg(x\in A\cup B)$$

$$\Rightarrow \neg(x\in A \vee x\in B)$$

$\left\{\neg(P\vee Q)= \neg P\wedge\neg Q\right\}$

דה מורגן בפסוקים $\Rightarrow$ $\underbrace{\neg(x\in A)}_{x\in A^c}\wedge\underbrace{\neg(x\in B)}_{x\in B^c}$

$$\Rightarrow x\in A^c\cap B^c.$$

($\supseteq$) יהי $x\in A^c\cap B^c$. אזי:

$$(x\in A^c)\wedge(x\in B^c)$$

$$\Longrightarrow \neg(x\in A)\wedge\neg(x\in B)$$

$\left\{\begin{array}{l} P\wedge\neg Q= \\ =\neg(P\vee Q)\end{array}\right\}$

$$\xrightarrow{\text{דה מורגן לוגיקה}} \neg(x\in A\vee x\in B)$$

$$\xrightarrow{\text{מהגדרת האיחוד}} \neg(x\in A\cup B) \xrightarrow[\text{מהגדרת המשלים}]{} x\in(A\cup B)^c.$$

הראינו הכלה ⊆, הכלה שנייה. מ.ש.ל.

② - תרגיל.

טענה: (חוק הפילוג)

① $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

② $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

הוכחה:

① $(\subseteq)$: יהי $x\in A\cap(B\cup C)$.

כדי להוכיח כי $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ עלינו

להראות כי: $x\in A\cap B$ או $x\in A\cap C$.

ידוע לנו כי $x\in A\cap(B\cup C)$. בפרט, $\underline{x\in A}$.

וכן גם: $x\in B\cup C$.

לכן $x\in B$ או $x\in C$.

אם $x\in B$, אז $x\in A\cap B$.

אם $x\in C$, אז $x\in A\cap C$.

בכל מקרה $x\in A\cap B$ או $x\in A\cap C$,

ולכן: $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(⊇): יהי $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ונוכיח כי $x\in A\cap(B\cup C)$.

נתון $\underline{x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)}$ ולכן (מהגדרת איחוד קל׳):

$x\in A\cap B$ ⟵ $x\in A$ וגם $x\in B$ ⇓ $x\in B\cup C$ ⇓ $\boxed{x\in A\cap(B\cup C)}$

או:

$x\in A\cap C$ ⟵ $x\in A$ וגם $x\in C$ ⇓ $x\in B\cup C$ ⇓ $\boxed{x\in A\cap(B\cup C)}$

וקיבלנו את הדרוש בכל אחד מהמקרים. מ.ש.ל.

② – דומה מאוד ל-①.

הערה: • $A\subseteq A\cup B$

• $A\cap B\subseteq A$

הערה: $(\cup,\vee)$ $(\cap,\wedge)$

~~"אני מרצה איחוד מתרגל"~~

"אני" $\Rightarrow$ $\{$מרצים$\}\cup\{$מתרגלים$\}$"

~~"אני" $\Rightarrow$ $\{$מרצים$\}\vee\{$מתרגלים$\}$"~~

"אני מרצה $\vee$ מתרגל"

הערה: אם $A\subseteq B$ וגם $B\subseteq C$ אז $A\subseteq C$.

איחוד וחיתוך כלליים

תהא $S\neq\phi$ קב׳ לא ריקה של קבוצות.

איחוד $\boxed{\bigcup_{A\in S} A} := \{x \mid \exists A\in S : x\in A\}$

חיתוך $\boxed{\bigcap_{A\in S} A} := \{x \mid \forall A\in S : x\in A\}$

דוגמה:

$$S = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{3,5\}\}$$

$$\bigcup_{A\in S} A = \{x \mid \exists A\in S : x\in A\} =$$
$$= \{1,2,3,4,5\}$$

$$\bigcap_{A\in S} A = \emptyset$$

דוגמה נוספת:

$$S = \{\{\emptyset,1\}, \{\{\emptyset\},\{1,\emptyset\}\}, \emptyset\}$$

$$\bigcup_{A\in S} A = \{x \mid \exists A\in S : x\in S\} =$$
$$= \{\emptyset, 1, \{\emptyset\}, \{1,\emptyset\}\}$$

$$\bigcap_{A\in S} A = \emptyset$$

כאשר חותכים את הקב' הריקה עם קב' אחרת מקבלים שוב את הקב' הריקה.

דוגמה נוספת:

$$S = \{\{\emptyset,1\}, \{\emptyset,\{\emptyset\},\{1,\emptyset\}\}, \emptyset\}$$

$$\bigcap_{A\in S} A = \emptyset \qquad \cancel{\{\emptyset\}}$$

כי נניח בשלילה שיש $x\in\bigcap_{A\in S} A$

בפרט $\forall A\in S : x\in A$

בפרט $x\in\emptyset$, בסתירה לכך שאין לק' הריקה איברים.

שימו לב:

$\emptyset\in\{\emptyset\}$ אבל $\emptyset\notin\emptyset$.

דוגמה:

$$S=\{\{\{\emptyset\},1\},\{\{\emptyset\},\{1,\emptyset\}\},\{\{\emptyset\}\}\}$$

$$\bigcup_{A\in S} A = \{1,\{\emptyset\},\{1,\emptyset\}\}$$

$$\bigcap_{A\in S} A = \{\emptyset\}$$

מסקנה: אם $\emptyset\in S$, אז:

$$\bigcap_{A\in S} A=\emptyset.$$

דוגמה:

$$S=\left\{\left[\tfrac{1}{n},1\right) \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$$

$$\left\{[1,1),\left[\tfrac12,1\right),\left[\tfrac13,1\right),\dots\right\}$$

כאשר:

$$[x,y)=\{r\in\mathbb{R} \mid x\le r<y\}$$

למשל:

$$[1/2,1)=\{r\in\mathbb{R}\mid \tfrac12\le x<1\}$$

טענה:

$$\bigcup_{A\in S} A = (0,1)$$

$(=\{r\in\mathbb{R} \mid 0<r<1\})$

הוכחה: הכלה דו"כ.

$(\subseteq)$: יהי $x\in\bigcup_{A\in S} A$. מהגדרת האיחוד:

$$\bigcup_{A\in S} A = \{x \mid \exists A\in S : x\in A\}$$

קיים $A\in S$ כך ש- $x\in A$.

בפרט $A=[\frac{1}{n},1)$ לאיזשהו $n\in\mathbb{N}$.

נובע כי $x\in[\frac{1}{n},1)$, ובפרט $\underbrace{0<x<1}_{x\in(0,1)}$.

$\{r \mid \frac{1}{n}\le r<1\}$

$(\supseteq)$: יהי $x\in(0,1)$, כלומר: $0<x<1$.

קיים $n\in\mathbb{N}$: $\frac{1}{n}\le x$.

למשל: ניקח $n:=\lceil 1/x\rceil$.

נראה כי n זה עובד:

$$\left(\frac{1}{n}=\frac{1}{\lceil 1/x\rceil}\le\frac{1}{1/x}=x\right.$$

מגדילים את המכנה:

$\lceil 1/x\rceil\ge 1/x$

כלומר:

$$\frac{1}{n}\le x<1$$

ולכן:

$$x\in\left[\frac{1}{n},1\right)$$

$A \in S$

בפרט $\exists A\in S$ כך ש- $x\in A$,
ולכן מהגדרת האיחוד:

$$x \in \bigcup_{A\in S} A.$$

מ.ש.ל.

הערה: מסמנים:

$$\bigcup_{A\in S} A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\tfrac{1}{n},1\right) =$$

$$= \left[\tfrac{1}{1},1\right)\cup\left[\tfrac{1}{2},1\right)\cup\left[\tfrac{1}{3},1\right)\cup\left[\tfrac{1}{4},1\right)\cup\left[\tfrac{1}{5},1\right)\cup\dots$$

אם $S=\{A_i\}$ משפחה של קב' $i\in I$:
(קב' אינדקסים)

מסמנים:

$$\bigcup_{A\in S} A = \bigcup_{i\in I} A_i$$

$$S=\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,4\},\{1,2,3,4\}\}$$

כאשר S משפחה מאונדקסת:

$$S=\{\{n,n+1\} \mid n\in\mathbb{N}\} = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\dots\}$$

$$\bigcup_{A \in S} A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n, n+1\}$$

[Introduction to set theory]
