תרגול 5

9 ביולי 2013

מרחבים וקטורים

דוגמא שכדאי שתהיה ברקע $\mathbb{R}^3 := \{(x,y,z)\,|\,x,y,z,\in\mathbb{R}\}$ עם חיבור $(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ וכפל בסקלאר $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha(x,y,z) = (\alpha z, \alpha y, \alpha z)$ הוא מרחב וקטורי. ההגדרה הפורמאלית מכלילה את הדוגמא.

הגדרה: מרחב וקטורי הוא מבנה הכולל קבוצה V עם פעולת חיבור ושדה $\mathbb{F}$ עם חיבור וכפל שלו. בנוסף, קיים כפל המקשר בין איברי Vלאיברי $\mathbb{F}$(כפל בסקלאר). האקסיומות שמרחב וקטורי צריך לקיים:

1. אקסיומות של החיבור ב V. לכל $v,w,u\in V$ מתקיים
   (א) מוגדרות $v+w\in V$.
   (ב) קיבוץ $v+(u+w)=(v+u)+w$.
   (ג) חילוף $v+u=u+v$.
   (ד) איבר נטרלי $\exists 0\in V:\ \forall v\in V: 0+v=v$.
   (ה) איבר נגדי $\forall v\in V\ \exists(-v)\in V:\ v+(-v)=0$.
2. אקסיומות של כפל וחיבור של שדה ־בהגדרת שדה
3. אקסיומות כפל בסקלאר לכל $v,u\in V, \alpha,\beta\in\mathbb{F}$מתקיים
   (א) מוגדרות $\alpha v\in V$
   (ב) קיבוץ $\alpha(\beta v)=(\alpha\beta)v$
   (ג) כפל יחידה $1_{\mathbb{F}}v=v$
   (ד) פילוג
      i. $\alpha(v+u)=\alpha v+\alpha u$
      ii. $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$

אומרים ש V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. איברי V הנקראים וקטורים. איברי $\mathbb{F}$ נקראים סקלארים.

תכונות בסיסיות:

1. $(-1_F)v=(-v)$
2. $0_F v=0_V$

דוגמאות

1. מרחב הפולינומים מעל שדה מדרגה קטנה שווה ל n
$\mathbb{F}_n[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n | \, a_i \in \mathbb{F}\}$ עם פעולת חיבור פולינומים וכפל בסקלאר טבעיים.
מקרה פרטי $V = \mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \, | \, a_i \in \mathbb{R}\}$
עם חיבור $(a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_2)x + (a_2 + b_2)x^2$
וכפל בסקלאר $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha((a_0 + a_1x + a_2x^2) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x^1 + (\alpha a_2)x^2$.
נוכיח כי זהו אכן מרחב וקטורי:
אקסיומות של החיבור ב V. לכל $f, g, h \in V$ פולינומים מדרגה לכל היותר 2 מתקיים:

   (א) מוגדרות $f + h \in V$. - טרוויאלי על פי הגדרה
   (ב) קיבוץ $f + (g + h) = (f + g) + h$ - נובע מתכונת הקיבוץ ב $\mathbb{R}$ על המקדמים של הפולינומים.
   (ג) חילוף $f + g = g + f$. -נובע מתכונת החילוף ב $\mathbb{R}$ על המקדמים של הפולינומים.
   (ד) איבר נטרלי - פולינום האפס 0 ואכן לכל $f \in V$ מתקיים $0 + f = f$
   (ה) איבר נגדי- לכל $f = a_0+a_1x+a_2x^2 \in V$. קיים $(-f) = (-a_0)+(-a_1)x+(-a_2)x^2$ ואכן $f + (-f) = 0$.

אקסיומות כפל בסקלאר לכל $f, g \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים

   (א) מוגדרות $\alpha f \in V$- טרוויאלי לפי הגדרה
   (ב) קיבוץ $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$- מתקיים לפי תכונת הקיבוץ על מקדמי הפולינום.
   (ג) כפל יחידה $1_{\mathbb{R}}f = f$- כי כל מקדם כפול 1 שווה למקדם עצמו
   (ד) פילוג
      i. $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$-מתקיים לפי תכונת פילוג של מספריים ממשיים מתקיים בפרט עבור מקדמי הפולינום.
      ii. $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$-מתקיים לפי תכונת פילוג של מספריים ממשיים מתקיים בפרט עבור מקדמי הפולינום.

2. מרחב הפולינומים $\mathbb{F}[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n | \, a_i \in \mathbb{F}, n \in \mathbb{N}\}$ עם חיבור וכפל בסקלאר מוכרים.

3. $\mathbb{F}^n := \{(a_1, \ldots, a_n) | \, a_i \in \mathbb{F}\}$
עם חיבור $(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$
וכפל בסקלאר $\alpha(a_1, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$.

4. מרחב המטריצות $\mathbb{F}^{m\times n}$ מעל שדה $\mathbb{F}$ עם חיבור וכפל בסקלאר שהגדרנו כבר.

5. $V = \mathbb{R}$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$.

6. $V = \mathbb{C}^3, \, \mathbb{F} = \mathbb{R}$.

(הערה/חידוד $V = \mathbb{R}^3, \, \mathbb{F} = \mathbb{C}$ אינו מרחב וקטורי כי $i(1, 1, 1) = (i, i, i) \notin V$.)

תתי מרחבים

הגדרה יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $W \subseteq V$ יקרא תת מרחב אם הוא מרחב וקטורי בפני עצמו ביחס לפעולות V .

הערה: כדי לבדוק אם $W \subseteq V$ הוא תת מרחב מספיק לבדוק

1. $w, u \in W$ מתקיים
   (א) מוגדרות $u + w \in W$.
   (ב) איבר נטרלי 0 של Vנמצא ב־W
2. אקסיומות כפל בסקלאר לכל $w \in W, \alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים
   (א) מוגדרות $\alpha w \in W$

את שאר האקסיומות W יורש מ V כתת קבוצה.

הערה: ניתן לרכז את הבדיקות הנ"ל מספיק לבדוק

1. $W \neq \emptyset$
2. שלכל $w, u \in W,\ \alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $\alpha u + w \in W$.

הערה: $\{0\}, V \subseteq V$ תמיד תתי מרחבים ונקראים תתי המרחבים הטריוואלים.

דוגמאות ודוגמאות נגדיות:

1. המישור האוקלידי $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$
   (א) $W = \{(x, y) \,|\, x, y \geq 0\}$הרביע החיובי אינו תת מרחב
   כי $-1(1, 1) = (-1, -1) \notin W$
   (ב) $W = \{(x, y) \,|\, x, y \geq 0 \text{ or } x, y \leq 0\}$ הרביע החיובי והשלילי אינו תת מרחב
   כי $\underset{\in W}{(2, 4)} + \underset{\in W}{(-3, -3)} = (-1, 1) \notin W$
   (ג) $W = \{(x, y) | \, y = 3x\}$ קו ישר העובר בראשית הוא כן תת מרחב. נוכיח
   i. יהיו $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in W$ אזי $y_1 = 3x_1, y_2 = 3x_2$ ולכן $y_1 + y_2 = 3(x_1 + x_2)$
   כלומר $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in W$
   ii. האיבר הנטראלי של Vהוא $(0, 0)$ והוא שייך ל W
   iii. יהיו $(x, y) \in W, \alpha \in \mathbb{R}$ אזי $y = 3x$ ולכן גם $\alpha y = 3\alpha x$ולכן $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y) \in W$.
   (ד) תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
   ויהא $W = \{(a, b) \,|\, \exists(x, y) : A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\} = \{A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\}$.
   Wכן תת מרחב. נוכיח: (ברור ש $W \neq \emptyset$)
   יהיו $A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W, \alpha \in \mathbb{R}$ אזי

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}+\alpha A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)=A\begin{pmatrix} x_1+\alpha x_2 \\ y_1+\alpha y_2 \end{pmatrix}.$$

ולכן $A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}+\alpha A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\in W$.

הערה: Wכמרחב וקטורי בפני עצמו נקרא מרחב העמודות של A.

2. מרחב המטריצות המרוכבות מגודל 2×2. $\mathbb{C}^{2\times 2}$ מעל שדה $\mathbb{C}$

(א) המטריצות מסוג $W=\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}|a\in\mathbb{C}\}$ הן תת מרחב. נוכיח :

(ברור ש $W\neq\emptyset$). כעת יהיו $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in W$ $\alpha\in\mathbb{C},$

אזי $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+\alpha b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in W$

(ב) המטריצות הסימטריות $W=\{A\in V\mid A^t=A\}$ הן תת מרחב (בתרגיל).

(ג) המטריצות הסימטריות איחוד עם המטריצות האנטי סימטריות
$W=\{A\in V\mid A^t=A \text{ or } A^t=-A\}$אינו תת מרחב כי
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\in W$
אבל $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\notin W$.

3. $V=\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפלינומים מדרגה 2 מעל $\mathbb{R}$.

(א) $W=\mathbb{R}_1[x]=\{a+bx|\,a,b\in\mathbb{R}\}$ הינו תת מרחב כי באופן כללי $\mathbb{R}_n[x]$ הוא מרחב וקטורי.

(ב) $W=\{a+bx|\,0\neq b\in\mathbb{R}\}$הפולינומים מדרגה 1 בדיוק אינו תת מרחב.
כי פולינום האפס שהוא האיבר הנטרלי ב Vלא נמצא ב W W $0\notin$.

4. $V=\mathbb{R}$הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}=\mathbb{Q}$.

(א) $W=\mathbb{Q}$הוא תת מרחב כי לכל $v,w\in W,\ \alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים $\alpha v+w\in W$.

5. $V=\mathbb{R}$הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$.

(א) $W=\mathbb{Q}$הוא אינו תת מרחב כי $1\in W,\ \sqrt{2}\in\mathbb{F}$ אבל $1\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\notin W$

חיתוך של תתי מרחבים

משפט: יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיו $W,U\subseteq V$ תתי מרחבים. אזי
חיתוך תתי המרחבים $W\cap U:=\{v\in V:\ v\in W\wedge v\in U\}$ הינו תת מרחב
דוגמאות:

1. $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. יהיו $W=\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:x+y+z=0\}$ ו־ $U=\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:-x+y+2z=0\}$ שני מישורים במרחב העוברים בראשית הצירים.

$$W\cap U=$$
$$\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:x+y+z=0\wedge -x+y+2z=0\}=$$
$$\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:x+y+z=-x+y+2z\wedge x+y+z=0\}$$
$$=\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:2x=z\wedge x+y+z=0\}=(x=t)$$
$$\{\begin{pmatrix}t\\-3t\\2t\end{pmatrix}:t\in\mathbb{R}\}=\{t\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}:t\in\mathbb{R}\}$$

2. $V=\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. יהיו $W=\{\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix}:\alpha\in\mathbb{R}\}$

ו־ $U=\{\beta\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}:\beta\in\mathbb{R}\}$ אזי

$$W\cap U=$$
$$\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in V\mid\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\\2\beta\\0\end{pmatrix},\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\{0\}$$

3. $V=\mathbb{C}^{n\times n}$ מעל $\mathbb{C}$. יהיו Wתת מרחב של המטריצות הסימטריות ו U תת המרחב של המטריצות האנטי סימטריות אזי:
$$W\cap U=\{A:A^t=A\wedge A^t=-A\}=\{0\}$$

צירופים לינארית ותלות לינארית

הגדרה: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. יהיו $v_1,v_2\dots,v_n\in V$ ו $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ אזי ביטוי מהצורה $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots\alpha_nv_n$ נקרא צירוף לינארי (צ"ל).

לדוגמא: $V=\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{F}=\mathbb{R}$. אזי $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\sqrt{3}-\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}3+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\pi$ הוא צירוף לינארי.

הערה: אם ניקח כל $\alpha_i=0$ נקבל $0v_1+0v_2+\cdots0v_n=0$. צ"ל זה נקרא טרוויאלי.

הגדרה: בסימונים הקודמים אם קיים צ"ל לא טריוואלי כך ש $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots\alpha_nv_n=0$ אזי נאמר ש $\{v_1,v_2\dots,v_n\}$ תלויה לינארית (ת"ל). אחרת, אם הצ"ל הטריוולאי היחידי

ששווה ל־0 אזי נאמר ש $\{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$ בלתי תלויה לינארית (בת"ל).
במילים אחרות אם $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n = 0$ גורר שכל $\alpha_i = 0$ אזי $\{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$ קבוצה בת"ל

דוגמאות

1. $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל
כי $0 = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
פירושו $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}$ שזה גורר $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0$.

2. $V = \mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$.
נתבונן ב $0 = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$
ונמיר אותו להצגה מטריצית $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\2 & 1 & -1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}$
כעת השאלה שקולה האם יש פתרון לא טריאלי למערכת. נדרג ונבדוק
$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\2 & -3 & -1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & -1 & -1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
נציב $z = t$ ונקבל $t\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-t\\-t\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}$ פתרון לא טרוויאלי. כלומר הוקטורים הנ"ל ת"ל.

3. יהי $0 \neq v \in V$ אזי $\{v\}$ קבוצה בת"ל.

4. יהי $S = \{v_1 \ldots, v_n\}$ כך ש $0_V \in S$ אזי S ת"ל.

5. $V = \mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפלינומים עד דרגה 2 מעל $\mathbb{R}$.
תהא $S = \{2 + 6x, x^2, 1 + 2x + 2x^2\}$.
האם $1 + x + x^2$ הוא צ"ל של איברי S?
פתרון: צריך למצוא $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
כך ש $\alpha_1(2 + 6x) + \alpha_2 x^2 + \alpha_3(1 + 2x + 2x^2) = 1 + 1x + x^2$
כלומר לפי השוואת מקדמים : $2\alpha_1 + \alpha_3 = 1,\ 6\alpha_1 + 2\alpha_3 = 1,\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1$

ובצורה מטריצית $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. נבדוק

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

כלומר $1 + 1x + x^2 = -0.5(2+6x) + (-3)x^2 + 2(1+2x+2x^2)$.

6. יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $S = \{v_1, \dots v_n\}$ קבוצה בת"ל. הוכח $S' = \{v_1, w_2, \dots w_n\}$ בת"ל כאשר $w_i = v_i + v_1$.

פתרון: נניח $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots \alpha_n w_n = 0$ צ"ל $\alpha_i = 0$.

$$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots \alpha_n w_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 (v_1 + v_2) + \cdots \alpha_n (v_1 + v_n)$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_n v_n$$

כיוון ש $S = \{v_1, \dots v_n\}$ בת"ל גורר ש $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) = 0,\ \alpha_2 = 0 \dots \alpha_n = 0$

$\Leftarrow \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0 \dots \alpha_n = 0 \Leftarrow$ S' בת"ל