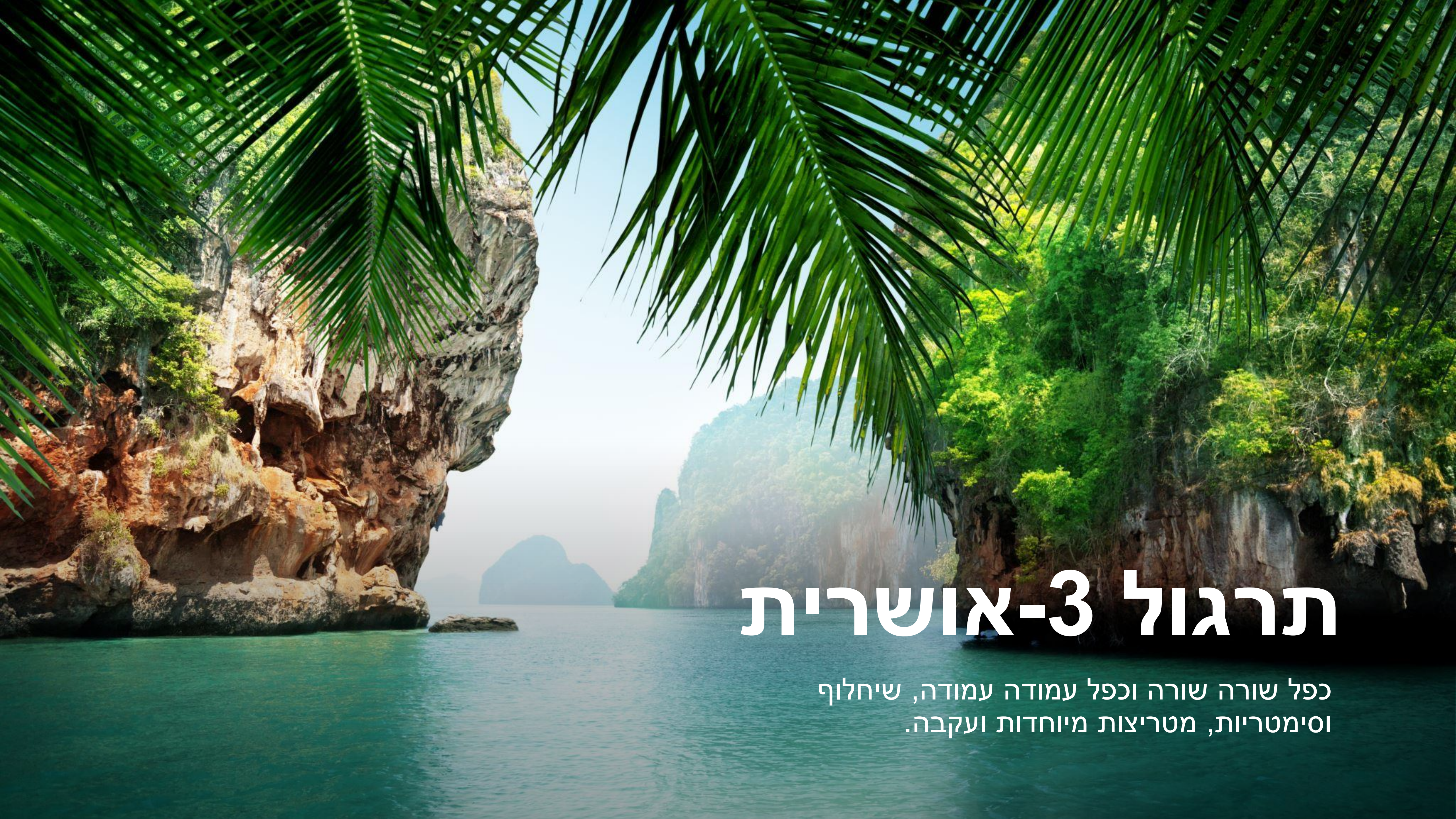

תרגול 3-אושרית

כפל שורה שורה וכפל עמודה עמודה, שיחלוף
וסימטריות, מטריצות מיוחדות ועקבה.

מסקנה מתרגול קודם:

כל פתרון כללי של מערכת לא הומוגנית ניתן לייצג כפתרון פרטי של המערכת הלא הומוגנית פלוס פתרון כללי של המערכת ההומוגנית.

$$v = v_1 + h$$

פתרון כללי ללא הומוגנית

פתרון פרטי ללא הומוגנית

פתרון כללי להומוגנית

סימון נוסף של כפל מטריצות:

כפל שורה שורה:

נביט במטריצה A ששורותיה $R_1,\dots,R_n$ ונסמן לשם נוחות - $A=\begin{pmatrix} -R_1- \\ \vdots \\ -R_n- \end{pmatrix}$

ונביט בוקטור השורה $\underline{x}=(a_1,\dots,a_n)$

מתקיים - $x\cdot A=\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot R_i$

דג׳: $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

חישוב רגיל:

$$\underset{1\times 3}{x \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}} \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 42 & 21 & 21 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$
כפל רגיל

כפל שורה, שורה!

$$x \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - R_1 - \\ - R_2 - \\ - R_3 - \end{pmatrix} = 1 \cdot R_1 + 2R_2 + 3R_3 =$$

$$= 1\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 14 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 21 & 21 \end{pmatrix}$$

כפל עמודה עמודה: (דרך - אותה ממש)

יהי מטריצה A שעמודותיה: $C_1,\dots,C_n$ (נכתוב לפי נוחות) $A=\begin{pmatrix} | & & | \\ C_1 & \dots & C_m \\ | & & | \end{pmatrix}$

ויהי וקטור העמודה $x=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ מתקיים ש- $Ax=\sum_{i=1}^{m} a_i\cdot C_i$

דוג': $x=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$

שימוש רגיל:

$$Ax=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

כפל עמודה עמודה:

$$Ax=\begin{pmatrix} | & | \\ C_1 & C_2 \\ | & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=1\cdot C_1+2\cdot C_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

תרגיל:

נתון: $Ax=b$, v- פתרון למערכת הלא הומוגנית

w- פתרון למערכת ההומוגנית $Ax=0$

$B=(v,w,v+w,v-w,w-v)$

צ"ל: $AB=?$

שימו ♡ - B מתוארת לפי העמודות שלה רק ולכן - [illegible] זה לא וקטור 1×5

$$AB = A(v,w,v+w,v-w,w-v) = \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ Av & Aw & A(v+w) & A(v-w) & A(w-v) \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ b & 0 & b & b & -b \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix}$$

לפי כפל עמודה עמודה

לפי הגדרת כפל עמודה עמודה זה שקול להפעלה של A על כל 1 מהעמודות

לפי פתרונים v, w.

הגד: <u>מטריצת בלוקים</u> - מטריצת בלוקים הינה מטריצה הבנויה ממס' מטריצות קטנות יותר שנקראות בלוקים

דוג: $B=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ אז: $C=(A|B)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&3\end{pmatrix}$

משפט: לכל 3 מטריצות C,A,B כך שהכפל מוגדר מתקיים: $C(A|B)=(CA|CB)$

כלומר - כפל C במטריצת בלוקים הוא - כפל של C בכל בלוק.

באופן כללי: $M_2=\left(\begin{array}{c|c}X&Y\\\hline Z&W\end{array}\right)$ $M_1=\left(\begin{array}{c|c}A&B\\\hline C&D\end{array}\right)$ כך שהכפלים מוגדרים ומתאימים בגדלי מטריצות -

$$M_1\cdot M_2=\left(\begin{array}{c|c}(A\,B)\begin{pmatrix}X\\Z\end{pmatrix}&(A\,B)\begin{pmatrix}Y\\W\end{pmatrix}\\\hline (C\,D)\begin{pmatrix}X\\Z\end{pmatrix}&(C\,D)\begin{pmatrix}Y\\W\end{pmatrix}\end{array}\right)$$

בעצם - מסתכלים על כל בלוק כעל איבר במטריצה ומשם כמו כפל איבר איבר

שחלוף וסימטריות:

הגד: מטריצה משוחלפת - תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times m}$ אז המטריצה המשוחלפת $A^t\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מוגדרת ע"י: $(A^t)_{ij}=A_{ji}$

דוגמה:

$$A^t=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix} \Leftarrow A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

פשוט כל שורה במטריצה המקורית הופכת לעמודה במטריצה המשוחלפת

תכונות:

1) לכל 2 מטריצות A,B שעבורן הכפל מוגדר, מתקיים: $(AB)^t=B^t\cdot A^t$

2) $(A^t)^t=A$

3) לכל 2 מטריצות מאותו סדר A,B מתקיים $(A+B)^t=A^t+B^t$

4) לכל מטריצה A, ולכל קבוע α מהשדה מתקיים $(\alpha A)^t=\alpha\cdot A^t$

הגד': מטריצה סימטרית - אם $A=A^t$ דוג': $\begin{pmatrix}2&a\\a&5\end{pmatrix}$ סימטרית

אנטי סימטרית - אם $A=-A^t$ דוג': $\begin{pmatrix}0&-a\\a&0\end{pmatrix}$ אנטי סימטרית

תרגיל:

א) הוכח שלכל מטריצה $A\in F^{m\times n}$ המטריצה $A\cdot A^t$ סימטרית

ב) הוכח שלכל מטריצה ריבועית באופן מטריצה ריבועית לגבי מטריצה [illegible] מאת.
מתקיים שהמטריצה $A+A^t$ סימטרית ואילו המטריצה $A-A^t$ אנטי סימטרית

תרגיל:

א) הוכח שלכל מטריצה $A\in F^{m\times n}$ המטריצה $A\cdot A^t$ סימטרית.

ב) הוכח שלכל מטריצה ריבועית כאשר מטריצה ריבועית זו מטריצה מסדר $n\times n$.
מתקיים שהמטריצה $A+A^t$ סימטרית ואילו המטריצה $A-A^t$ אנטי-סימטרית

פתרון:

א) נזכר כי כדי להוכיח מטריצה סימטרית יש להראות כי ~~[illegible]~~ $B^t=B$

לכן - נתחיל לחשב את:

$$(A\cdot A^t)^t \underset{\text{לפי } 1}{=} (A^t)^t\cdot A^t \underset{\text{לפי } 2}{=} A\cdot A^t$$

ואכן - מתקיים.

ב)

$$(A+A^t)^t \underset{\text{לפי } 3}{=} A^t+(A^t)^t \underset{\text{לפי } 2}{=} A^t+A \underset{\text{קומוטטיביות חיבור}}{=} A+A^t$$

$$(A-A^t)^t \underset{\text{לפי } 3}{=} A^t-(A^t)^t = A^t-A = -(A-A^t)$$

תרגיל:

תהי A מטריצה ריבועית ממשית מסדר n. אנטי-סימטרית. הוכח - שכל איברי האלכסון שווים ל-0

פתרון: נזכיר - האיברי האלכסון של A^t. A_{ii}

A - אנטי-סימטרית לכן - $A^t=-A$ ולכן - איבר של - $(-A)_{ii}$

$$\Leftarrow \quad A_{ii} = -[A]_{ii}$$

$$2(A)_{ii} = 0$$

$$\boxed{(A)_{ii} = 0}$$

מש"ל

מטריצות מיוחדות:

1) מטריצת היחידה -

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

תכונה מיוחדת: לכל מטריצה ריבועית A מתקיים

$$A\cdot I = I\cdot A = A$$

2) מטריצת האפס -

$$O_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

תכונה מיוחדת - מטריצת האפס מקיימת את התכונה שלכל מטריצה ריבועית A מתקיים ש-

$$A\cdot 0 = 0\cdot A = 0$$

$$A + 0 = 0 + A = A$$

3) מטריצה משולשית עליונה:

הגדרה -

$$A = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & \cdots\ 0 & * \end{pmatrix}$$

איברים מעל האלכסון - מה שרוצים,
מתחת לאלכסון אפסים.

כלומר- $a_{ij} = 0$ לכל $j < i$.

ד) **מטריצה משולשית תחתונה:**

$$A=\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{pmatrix}$$

כלומר - $a_{ij}=0$ לכל $i<j$

ה) **מטריצה אלכסונית:**

$$A=\begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

כלומר - $a_{ij}=0$ לכל $i\neq j$

ו) **מטריצה סקלרית:** מטריצה שכל איברי האלכסון שלה זהים.

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix}=\alpha\cdot I_n$$

עקבה: (trace)

הגד: trace = סכום איברי האלכסון של מטריצה ריבועית. סימון - כ- $tr(\ )$.

דוג: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad tr(A) = 1+4 = 5$

תכונות:

1) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

2) $tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$

3) $tr(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot tr(A)$

__תרגיל:__ (מאותגר)

א) תהא A - מטריצה ממשית ריבועית מסדר $n\times n$ כך ש- $tr(AA^t)=0$ __צ"ל:__ A מטריצת האפס.

ב) תהא A - מטריצה מרוכבת כך ש- $tr(A\cdot A^*)=0$ __צ"ל:__ A מטריצת האפס. $A^*=\bar{A}^t$

פתרון ג.א: יהי [illegible] מטריצה 2x2:

$$A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \qquad A^t=\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^t=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2+y^2 & * \\ * & z^2+w^2 \end{pmatrix}$$

$$tr(A\cdot A^t)=x^2+y^2+z^2+w^2$$

מתי: שווה ל-0

$$\Leftrightarrow x=y=z=w=0$$

פתרון:

$R_i(A)$ - שורה i של מטריצה A

$C_i(A)$ - עמודה i של מטריצה A

מכיוון שמטריצה משוחלפת מתקבלת ע"י החלפת שורות ועמודות של המטריצה המקורית, מתקיים:

$$(*) \quad (R_i(A))^t = C_i(A^t)$$

תזכורת כפל מטריצות: $(AB)_{ij} = R_i(A)\cdot C_j(B)$

לכן:

$$tr(AA^t) = \sum_{i=1}^{m}(A\cdot A^t)_{ii} = \sum_{i=1}^{m} R_i(A)\cdot C_i(A^t) = \sum_{i=1}^{m} R_i(A)(R_i(A))^t$$

לפי הג' עקבה.   לפי תזכורת לגבי כפל מטריצ'   לפי שוויון (*)

נקודה.

נשים ♡ שבאופן כללי - בהינתן $v=(x_1,\dots,x_n)$ מתקיים כי

$$v\cdot v^t=(x_1,\dots,x_n)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=x_1^2+\dots+x_n^2$$

$\Leftarrow$ נסיק ש- $tr(AA^t)$ שווה לסכום הריבועים של כל איברי המטריצה

מכיוון שריבוע [illegible] שווה ל-0, סכום ריבועים שווה ל-0 $\Leftrightarrow$ כל 1 מהריבועים הוא 0 $\Leftrightarrow$ כל האיברים במטריצה A הם אפס לכן המטריצה היא מטריצת האפס.

אינטואיציה על חישוב במטריצה 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_3} \\ \overline{z_2} & \overline{z_4} \end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^* = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_3} \\ \overline{z_2} & \overline{z_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1\cdot\overline{z_1} + z_2\cdot\overline{z_2} & * \\ * & z_3\cdot\overline{z_3} + z_4\overline{z_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |z_1|^2+|z_2|^2 & * \\ * & |z_3|^2+|z_4|^2 \end{pmatrix}$$

$$tr(A\cdot A^*) = |z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_4|^2$$

$\Leftarrow$

ב) עבור המרוכבים ההוכחה הינה דומה, פשוט מקבלים עבור וקטור מרוכב כללי $(z_1,\dots,z_n)$ מתקיים ש-

$$v\cdot v^* = \underbrace{|z_1|^2}_{\text{חיובי}}+\dots+\underbrace{|z_n|^2}_{\text{חיובי}}$$

$\Leftarrow$ כל איברי המטריצה הם אפס

להשתכנע- שיעורי בית ☺

הדגמה של חישוב במטריצה 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_3 \\ \bar{z}_2 & \bar{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \cdot \bar{z}_1 + z_2 \cdot \bar{z}_2 & * \\ * & z_3 \cdot \bar{z}_3 + z_4 \bar{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |z_1|^2 + |z_2|^2 & * \\ * & |z_3|^2 + |z_4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow$$

$$tr(A \cdot A^*) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$$

תרגיל ראשון- שכל מטריצה מהצורה AA^t היא סימטרית.

האם הכיוון ההפוך נכון?

תרגיל ראינו שכל מטריצה מהצורה AA^t היא סימטרית.
האם הכיוון ההפוך נכון?

פתרון:

קודם כל נבדוק את הכיוון ההפוך.
לכל מטריצה סימטרית $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ קיימת מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש- $B=A\cdot A^t$

$\boxed{\text{לא}}$ דוגמה נגדית $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ לא טוב!
כי אילו הייתה A מתאימה אז לפי תרגיל קודם B איברי האלכסון היו אי-שליליים
בסתירה.

מטריצות הפיכות:

הגד׳: $A \in F$ נקראת **הפיכה**, אם קיימת מטריצה יחידה B כך ש- $AB=BA=I$
במקרה זה B - **הופכית** של A ומסמנים אותה $B=A^{-1}$.

דוג׳: $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, A הופכית של עצמה.

בדיקה: נרצה להראות כי $A\cdot A=I$

$A\cdot A=I$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

✓ אכן מתקיים.

בהצלחה!!!