Yifat Haddad

תרגול - שדות, מס' מרוכבים

Yifathz@gmail.com

הגדרה: קבוצה $\mathbb{F}$ עם זוג פעולות בינאריות הנקראות כפל וחיבור $(\mathbb{F};\cdot,+)$ נקראת **שדה** אם התכונות הבאות מתקיימות:

1. **סגירות**

$$\forall a,b \in \mathbb{F} : a+b \in \mathbb{F}, a \cdot b \in \mathbb{F}$$

(שימו לב שזה בסך הכל אומר שתוצאת הפעולות הבינאריות נשארת בשדה)

2. **קומוטאטיביות/חילופיות**

$$\forall a,b \in \mathbb{F} : a+b = b+a, a \cdot b = b \cdot a$$

3. **אסוציאטיביות**

$$\forall a,b,c \in \mathbb{F} : (a+b)+c = a+(b+c), (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

4. **קיום אברים נייטרליים**

קיימים אברים שנסמנם 1,0 המקיימים

$$\forall a \in \mathbb{F} : 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, a+0 = 0+a = a$$

בנוסף מתקיים $0 \neq 1$

5. **קיום אבר נגדי לחיבור**-

לכל אבר a קיים אבר שנסמנו $(-a)$ כך שמתקיים $a+(-a)=0$.

לצורך קיצור הכתיבה נסמן $a+(-a)=a-a$ (פעולת החיסור היא פשוט חיבור לנגדי)

6. **קיום איבר הופכי לכפל**

לכל אבר $a \neq 0$ קיים אבר שנסמנו a^{-1} כך שמתקיים $a \cdot a^{-1}=1$.

שיטה נפוצה לסימון פעולה זו הנה $a \cdot b^{-1} = \dfrac{a}{b}$.

7. **דיסטריבוטיביות/פילוג**

$$\forall a,b,c \in \mathbb{F} : a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

שימו לב שזו התכונה היחידה המקשרת בין הכפל לבין החיבור.

יהי שדה $\mathbb{F}$. הוכיחו את הטענה הבאה: $\forall a \in \mathbb{F} : -(-a) = a$. (כלומר, הנגדי של הנגדי הוא האיבר עצמו)

יהי $a \in \mathbb{F}$. צ"ל $(-a)+a=0$ (הגדרת הנגדי)

כיוון שהחיבור חילופי, נקבל $(-a)+a = a+(-a) = 0$

ש- $-a$ נגדי ל- a

תרגיל 1.3 סעיף ד'

יהי שדה $\mathbb{F}$. הוכיחו את הטענה הבאה: $\forall a \in \mathbb{F} : (-1) \cdot a = -a$. (כלומר הנגדי של האיבר הנייטרלי הכפלי כפול a הינו הנגדי של a)

צ"ל $(-1)\cdot a$ הוא הנגדי a (לכן הם שווים כי נגדי יש אחד)

$$\underbrace{(-1)\cdot a}_{\text{צ"ל נגדי ל-}a} + a = 0$$

$$(-1)\cdot a + 1\cdot a = a\cdot \overbrace{(1+(-1))}^{0} = a\cdot 0 = 0$$

תרגיל:

הוכיחו אם $ac=ab$ כאשר $a\neq 0$, $b=c$ (הוכחת צמצום כפל)

פתרון:

נניח בשלילה $b\neq c$, $a\neq 0$, $ab=ac$. נכפול בהפכי של a:

$$a^{-1}ab = a^{-1}ac$$
$$1\cdot b = 1\cdot c \longrightarrow b=c$$

תרגיל

הוכיחו שבשדה יש רק איבר אחד נייטרלי לכפל

פתרון:

נניח בשלילה. נניח קיימים $a,b \in \mathbb{F}$ כך ש $a\cdot c=b\cdot c=c$ $\forall c\in\mathbb{F}$:

$$a\cdot c=b\cdot c \quad / \cdot c^{-1}$$

$$a\cdot cc^{-1}=b\cdot cc^{-1}$$

$$a\cdot 1=b\cdot 1$$

$a=b \longrightarrow$ סתירה

מש"ל

תרגיל

הוכיחו שבשדה לכל איבר יש הפכי יחיד

פתרון:

נניח בשלילה. נניח קיימים $a,b\in\mathbb{F}$ ההפכיים ל c.

$$c\cdot a=c\cdot b=1$$

$$c\cdot a=1 \quad / \cdot a^{-1} \qquad c\cdot b=1 \quad / \cdot b^{-1}$$

$$a^{-1}ca=a^{-1} \qquad b^{-1}cb=b^{-1}$$

$$ca^{-1}a=a^{-1} \qquad cb^{-1}b=b^{-1}$$

$$c\cdot 1=a^{-1} \qquad c\cdot 1=b^{-1}$$

$$a^{-1}=b^{-1} \quad / ab$$

$$aba^{-1}=abb^{-1} \longrightarrow a=b$$

$$\mathbb{Z}_p=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}....\overline{p-1}\}$$

הסבר מדוע $\mathbb{Z}_p$ אינו תת שדה של $\mathbb{R}$ (המשך ראשוני)

$\mathbb{Z}_p$ הוא לא תת-שדה של $\mathbb{R}$ כי תת שדה, זה תת קבוצה של איברים
מהשדה הגדול $\mathbb{R}$ ויקם תחת אותן פעולות

$\mathbb{R}$: $1+p-1=p$

בעוד שב $\mathbb{Z}_p$ $1+p-1=0$

הגדרה:

נגדיר את שדה המרוכבים

$$\mathbb{C}=\{\underbrace{a+bi}_{z}\mid a,b\in\mathbb{R}\}$$

$\underset{\text{Real}}{Re}(z)=a$, $\underset{\text{Imaginary}}{Im}(z)=b$

צמוד $\bar{z}=a-bi$, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

נגדיר את החיבור והכפל:

$z_1=a+bi$

$z_2=c+di$ $\longrightarrow$ $z_1+z_2=\overbrace{(a+c)}^{\mathbb{R}}+\overbrace{(b+d)}^{\mathbb{R}}i\in\mathbb{C}$

$$z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci-bd=(ac-bd)+(ad+bc)i\in\mathbb{C}$$

איברים ניטרליים:

$0=0+0i$ (ניטרלי חיבור)

$1=1+0i$ (ניטרלי כפל)

איברים הופכיים:

חיבור: $z_1=a+bi,\ z_2=-a+(-b)i \longrightarrow z_1+z_2=(a+bi)+(-a+(-b)i)=$

$$\underbrace{(a+(-a))}_{\text{הופכיים ב-}\mathbb{R}}+\underbrace{(b+(-b))}_{\text{הופכיים ב-}\mathbb{R}}i=0+0i=\underline{0}$$

כפל: $z_1=a+bi\neq 0 \longrightarrow \frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\underbrace{\frac{a}{a^2+b^2}}_{\in\mathbb{R}}-\underbrace{\frac{b}{a^2+b^2}}_{\in\mathbb{R}}i\in\mathbb{C}$

אחרי שהגדרנו את הכל, חילוף, קיבוץ ופילוג נובעות מתוך קיומן בשדה הממשיים $\mathbb{R}$.

$$\Downarrow$$

$\mathbb{C}$ שדה

תרגיל 3.2

אם נשנה את פעולת כפל המרוכבים לפעולה הבאה: $(a+bi)(c+di)=ac+bdi$, האם קבוצת המרוכבים תשאר שדה?

פתרון

לא נקח $z_1=0+i$ $z_2=1+0i$

$z_1\cdot z_2=(1+0i)\cdot(0+1i)=0+0i=0$

קיבלנו $0\neq z_1,z_2\in\mathbb{C}$ ש $z_1\cdot z_2=0$ ← מחלקי אפס

לא יכול לקרות בשדה.

הצג את הביטוי הבא בצורה $z = a + bi$ וציין מהם $Re(z), Im(z), \bar{z}, |z|$. הביטוי הינו: $\frac{5+2i}{2-3i}$

$$\frac{5+2i}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{10+15i+4i-6}{2^2+3^2}=\frac{4+19i}{13}\longrightarrow z=\frac{4}{13}+\frac{19}{13}i$$

$$Re(z)=\frac{4}{13} \qquad Im(z)=\frac{19}{13}$$

$$|z|=\sqrt{Re^2+Im^2} \quad , \quad \bar{z}=\frac{4}{13}-\frac{19}{13}i$$

תכונות של מרוכבים

- $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$
- $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$
- $\bar{z}\cdot z=|z|^2$
- $z^{-1}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$

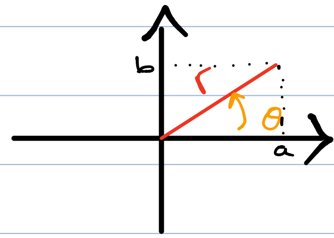
משפט דמואבר:

ידוע כי כל מס' מרוכב ניתן להציג באופן יחיד בצורה:

$$z=r\,cis(\theta)=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

r ממשי אי-שלילי, θ זוית הנמדדת נגד כיוון השעון מהקרן החיובית של x

$$z=a+bi \quad , r=\sqrt{a^2+b^2} \qquad \cos\theta=\frac{a}{r}$$



משפט דמואבר אומר

$$(r\,\text{cis}\,\theta)^n = r^n\,\text{cis}(n\theta)$$

חשב את $(1+\sqrt{3}i)^{2011}$

$r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

$\cos\theta = \frac{1}{2} \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ $\quad z = 2\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$z^{2011} = 2^{2011}\,\text{cis}\left(2011\cdot\frac{\pi}{3}\right) = 2^{2011}\,\text{cis}\left(335\cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 2^{2011}\,\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

פתרון את המשוואה $z^5 = \underbrace{3+4i}_{c}$

c polar $\rightarrow r = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \qquad \cos\theta = \frac{3}{5} \longrightarrow \alpha$ נקרא לזוית

$$(r\,\text{cis}\,\theta)^5 = 5\,\text{cis}(\alpha)$$

$$r^5\,\text{cis}(5\theta) = 5\,\text{cis}\,\alpha$$

מפה קל למצוא r, θ,

$$r = \sqrt[5]{5}\ ,\ \theta = \frac{\alpha}{5}$$

מערכות משוואות ליניאריות

מערכת משוואות ליניארית בת n משתנים עם m משוואות הינה מערכת מהצורה

$$a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n = b_1$$

מס' משוואה   אינדקס מקדם

$$a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,n} x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m,1} + a_{m,2} + \dots a_{m,n} x_n = b_m$$

ניתן לייצג כל מערכת כזו באמצעות טבלת מספרים הנקראת מטריצה

דוגמא:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ y - z = 2 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases} \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} x & y & z & b \end{array} \\ \begin{array}{c} I \\ II \\ III \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \end{array}$$

פעולות שניתן לעשות בלי לשנות את פתרונות מערכת המשוואות:

* כפל שני אגפי המשוואה במס' שונה מאפס

$$2R_1 \longrightarrow R_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

* חיבור שני אגפי משוואה אחת כפול קבוע, לשני אגפי משוואה שניה

$$R_3 - R_1 \longrightarrow R_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

* החלפת סדר המשוואות

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

דירוג גאוס:

איבר **מוביל/פותח/ציר** הינו האיבר הראשון בשורה ששונה מאפס (משמאל לימין). מטריצה נקראת **מדורגת** אם מתחת לכל איבר מוביל שלה יש אפסים בלבד וכל איבר מוביל נמצא מימין לאיברים המובילים הקודמים. בנוסף, יש את הדרישה כי שורות אפסים (אם קיימות) נמצאות בסוף. מטריצה נקראת **מדורגת קנונית** אם היא מדורגת, ובנוסף יש אפסים **מעל** לכל איבר מוביל והאיברים המובילים חייבים להיות שווים למספר אחד.

הערה: לכל מטריצה **קיימת** צורה קנונית **יחידה**.

ציר

$$\begin{pmatrix} * & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & * & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & * & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

איך מדרגים? גאוס

שלבים – בגדול:

1. מוצאים שורה שהאיבר הראשון שלה שונה מ-0. (נגיד שורה i, $a_{i,1}\neq 0$)
2. מחליפים את שורה i עם שורה 1
3. נחלק את השורה הראשונה (שהייתה פעם i) ב-$a_{i,1}$ (קיבלנו שורה עם ציר $=1$)
4. נחסר מכל שורה j את שורה 1 כפול $a_{j,1}$ כדי לקבל אפסים בעמודה 1

קיבלנו עמודה $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

5. חוזרים על 1-4 עבור שאר העמודות