# מבנים אלגבריים*

## תרגיל בית 7†

**תזכורות ומושגים**

- הומומורפיזם של חבורות $f$ הוא פונקציה בין חבורות $f\colon G\to H$ המקיימת, לכל $g_1,g_2\in G$, את השויון $f(g_1)f(g_2)=f(g_1g_2)$. אם $f$ חח"ע אז הוא נקרא מונומורפיזם. אם $f$ על אז הוא נקרא אפימורפיזם. אם $f$ חח"ע ועל אז הוא נקרא איזומורפיזם.
- יהיו $G,H$ חבורות. אם קיים איזומורפיזם $f\colon G\to H$ אז אומרים ששתי החבורות איזומורפיות זו לזו, ומסמנים $G\cong H$.
- יהי $f\colon G\to H$ הומומורפיזם. נסמן $\ker f=\{g\in G\colon f(g)=e_H\}$. זהו הגרעין של ההעתקה $f$.
- יהי $f\colon G\to H$ הומומורפיזם. נסמן $\mathrm{Im} f=\{h\in H\colon \exists g\in G, f(g)=h\}$. זו התמונה של ההעתקה $f$.
- מתקיים $\ker f\lhd G$ וכן $\mathrm{Im} f\le H$. $\ker f=\{e_G\}$ אם ורק אם $f$ מונומורפיזם.
- נניח $f$ הומומורפיזם מחבורה $G$, ונניח $S$ היא קבוצה יוצרת של חבורה $G$. אם נתונים ערכי $f$ על איברי $S$, אז ניתן לקבוע באופן יחיד את $f$. מנגד, אם נתונים ערכי העתקה $g$ על איברי $S$, לא בטוח שניתן להשלים את ערכי $g$ להומומורפיזם.
- משפט האיזומורפיזם הראשון: יהי $f\colon G\to H$ אפימורפיזם. אזי ההעתקה המושרה $\tilde{f}\colon {}^{G}\!/\!{}_{\ker f}\to H$ היא איזומורפיזם. לשון אחר: יהי $f\colon G\to H$ הומומורפיזם. אזי ההעתקה המושרה $\tilde{f}\colon {}^{G}\!/\!{}_{\ker f}\to \mathrm{Im} f$ היא איזומורפיזם.

**שאלה 1** תהיינה $G,H$ חבורות.

1. נגדיר העתקה $f\colon G\to G\times H$ על ידי $g\overset{f}{\mapsto}(g,e_H)$. הראו כי $f$ הומומורפיזם של חבורות, חשבו את הגרעין $\ker f$ ואת התמונה $\mathrm{Im} f$. האם זהו מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם?

---

*נא לרשום על התרגיל את שם התלמיד, מספר זיהוי ומספר קבוצה.

†יש להגיש בשיעור התרגיל בפרשת בא:

קבוצה 03 – הגשה בשיעור ביום שני, כ"ז בטבת (30 דצמ').

שאר הקבוצות – הגשה בשיעור ביום חמישי, א' בשבט (2 ינו').

2. נגדיר העתקה $f\colon G\times H\to G$ על ידי $(g,h)\overset{f}{\mapsto} g$. הראו כי $f$ הומומורפיזם של חבורות, חשבו את הגרעין $\ker f$ ואת התמונה $\mathrm{Im}f$. האם זהו מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם?

**פתרון**

1. ברור כי $f$ מוגדרת היטב. יהיו $g_1,g_2\in G$. אזי מתקיים

$$f\left(g_1\right)\cdot f\left(g_2\right)=\left(g_1,e_H\right)\cdot\left(g_2,e_H\right)=\left(g_1g_2,e_H\right)=f\left(g_1g_2\right)$$

הגרעין הוא

$$\begin{aligned}\ker f &= \{g\in G\colon f\left(g\right)=\left(e_G,e_H\right)\}=\{g\in G\colon \left(g,e_H\right)=\left(e_G,e_H\right)\}\\ &= \{g\in G\colon g=e_G\}=\{e_G\}\end{aligned}$$

ולפיכך זהו מונומורפיזם. התמונה היא באופן ברור $G\times\{e_H\}$.

2. ברור כי $f$ מוגדרת היטב. יהיו $\left(g_1,h_1\right),\left(g_2,h_2\right)\in G\times H$. אזי מתקיים

$$f\left(g_1,h_1\right)\cdot f\left(g_2,h_2\right)=g_1\cdot g_2=f\left(g_1g_2,h_1h_2\right)=f\left(\left(g_1,h_1\right)\left(g_2,h_2\right)\right)$$

הגרעין הוא

$$\begin{aligned}\ker f &= \{\left(g,h\right)\in G\times H\colon f\left(g,h\right)=e_G\}=\{\left(g,h\right)\in G\times H\colon g=e_G\}\\ &= \{e_G\}\times H\end{aligned}$$

התמונה היא באופן ברור $G$, כך שזהו אפימורפיזם. ■

**שאלה 2** בכל סעיף קבעו האם החבורות הן איזומורפיות. הסבירו קביעתכם.

1. $\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_{11}$ ו $\mathbb{Z}_{121}$.
2. $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_7$ ו $\mathbb{Z}_{21}$.
3. $\mathbb{R}$ ו $\mathbb{R}^*$. (שימו לב מה פעולת החבורה בשתי החבורות האלו).
4. $S_3$ ו $D_3$.
5. $S_4$ ו $D_{12}$.
6. $D_4$ ו $Q_8$ (חבורת הקווטרניונים, שהופיעה כבר בתרגיל בית 5; שימו לב לתיקון שהובא באתר הקורס לגבי חבורה זו).

**הערה** בשאלה זו די לציין בפירוש כי העתקה מסוימת היא איזומורפיזם, ללא הוכחה.

**פתרון**

1. לא. ב־$\mathbb{Z}_{121}$ יש יוצר יחיד $[1]$ שהוא מסדר 121, וב־$\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11}$ אין איבר מסדר 121, ולכן הן אינן איזומורפיות.

2. כן. ל־$\mathbb{Z}_{21}$ יש יוצר יחיד $[1]$ ול־$\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_3$ יש יוצר יחיד $(1,1)$. נגדיר איזומורפיזם על ידי $[1] \mapsto (1,1)$.

3. לא. ב־$\mathbb{R}$ כל איבר שאיננו 0 הוא מסדר $\infty$. לעומת זאת ב־$\mathbb{R}^*$ יש איבר מסדר 2, $-1$, ולכן הן אינן איזומורפיות.

4. כן. איזומורפיזם מ־$G$ ל־$H$ די להגדיר על יוצרי $G$. אנו ננסה להגדיר את האיזומורפיזם מ־$D_3$, כי אותה אנו מכירים טוב יותר. נתאים את השיקוף $\tau$ לתמורת החילוף $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$. את הסיבוב $\sigma$ אנו נתאים למחזור $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. הגדרנו העתקה זו על יוצרי $D_3$. ניתן להראות כי היא הומומורפיזם חח"ע ועל, ולכן איזומורפיזם.

5. לא. ב־$D_{12}$ יש איבר מסדר 12, הסיבוב הקטן ביותר. לעומת זאת, ב־$S_4$ אין איברים מסדר זה.

6. לא. ב־$D_4$ יש חמישה איברים מסדר 2 (כל השיקופים וגם הסיבוב ב־$180°$). מנגד, ב־$Q_8$ יש רק איבר אחד מסדר 2, $-1$, ולכן הן אינן איזומורפיות. $\blacksquare$

**שאלה 3** הוכיחו שהחבורה $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R}, (a,b) \neq (0,0) \right\}$ עם פעולת כפל מטריצות היא איזומורפית ל־$\mathbb{C}^*$.

**פתרון** נשתמש בהעתקה $f(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. קל לראות שזו העתקה מוגדרת היטב והפיכה. נותר להראות כי זהו הומומורפיזם. יהיו $a+bi, c+di \in \mathbb{C}^*$. אזי

$$\begin{aligned} f(a+bi) \cdot f(c+di) &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{pmatrix} \\ &= f(ac-bd+(ad+bc)i) = f((a+bi)(c+di)) \end{aligned}$$

אם כן זהו הומומורפיזם. כבר טענו כי ההעתקה היא הפיכה, ולכן זהו איזומורפיזם. $\blacksquare$

**שאלה 4** תהי $G$ חבורה, $H \leq G$, $N \trianglelefteq G$.

1. נסמן $K = H \cap N$. הוכיחו $K$ היא תת־חבורה נורמלית של $H$.

2. לכל איבר בחבורת המנה $aK \in {}^{H}/_{K}$ נגדיר העתקה $\phi(aK) = aN$. הוכיחו כי $\phi$ מוגדרת היטב. כלומר, לכל $a,b \in H$, אם $aK = bK$, אזי $\phi(aK) = \phi(bK)$. זאת אומרת שהתמונה של $\phi$ אינה תלוייה בבחירת נציג מחלקת שקילות ובכך מגדירה פונקציה מ ${}^{H}/_{K}$ ל ${}^{G}/_{N}$.

3. הראו כי $\phi$ מהסעיף הקודם היא מונומורפיזם.

**פתרון**

1. אנחנו כבר הראנו כי חיתוך של תתי־חבורה הוא תת־חבורה. לכן נותר להראות רק נורמליות. יהיו $h \in H, k \in H \cap N = K$. אנו נביט ב־$hkh^{-1}$. אנו רוצים להראות כי ביטוי זה הוא איבר ב־$K = H \cap N$. ובכן, $hkh^{-1}$ בבירור מוכל ב־$H$, כי הוא מכפלה של איברים ב־$H$. $N$ נורמלית ב־$G$ ולכן $hkh^{-1} \in N$. ביחד גילינו כי אכן $hkh^{-1} \in H \cap N$.

2. נבחר שני איברים ב־$H$ מאותו קוסט. נסמנם $aK = bK$ בעבור $a, b \in H$. אזי לפי הגדרתנו לעיל יתקיים $\phi(aK) = aN$ וכן יתקיים $\phi(bK) = bN$. הנתון לגבי $a, b$ הוא שהם מאותו קוסט, או לחילופין שקיים $k \in K$ כך ש־$b = ak$. ואז $\phi(bK) = bN = akN = aN = \phi(aK)$. אם כן מצאנו כי ההעתקה איננה תלויה בנציג, ולפיכך מוגדרת היטב.

3. הומומורפיזם: יהיו $aK, bK \in {}^{H}\!/_{K}$ נתונים. אזי

$$\phi(aK)\phi(bK) = aN \cdot bN = abN = \phi(abK)$$

חח"ע: נראה שהגרעין טריוויאלי. יהי $aK \in \ker\phi$. אנו מחפשים מתי $\phi(aK) = N$. נפעיל את $\phi$ ונקבל $aN = N$, או בניסוח אחר $a \in N$. לפי הגדרת $\phi$ איברי התחום שלה הם מהצורה $bK$ בעבור $b \in H$, ובפרט $a \in H$. ביחד מצאנו כי $a \in H \cap N = K$, ולכן $aK = K$. אם כן $\ker\phi = \{K\}$, והגרעין טריוויאלי. בכך הוכחנו כי $\phi$ חח"ע. בסך הכל מצאנו כי $\phi$ היא מונומורפיזם, כמבוקש. ■

**שאלה 5** יהיו $G, H$ חבורות סופיות. יהי $f: G \to H$ הומומורפיזם של חבורות. הוכיחו כי הסדר של התמונה $\mathrm{Im} f$ מחלק את $\gcd(|G|, |H|)$.

**פתרון** לפי משפט האיזומורפיזם הראשון, מתקיים ${}^{G}\!/_{\ker f} \cong \mathrm{Im} f$. לפי לגרנז', מכאן נובע $|\mathrm{Im} f| = \frac{|G|}{|\ker f|}$, ולכן $|\mathrm{Im} f| \mid |G|$. מנגד, מתקיים $\mathrm{Im} f \leq H$, ולפי לגרנז' $|\mathrm{Im} f| \mid |H|$. אם כן $|\mathrm{Im} f|$ מחלק את שני הסדרים, ולכן הוא מחלק את המחלק המשותף הגדול ביותר שלהם, $\gcd(|G|, |H|)$. ■

**שאלה 6** מה האפשרויות ל־$\mathrm{Im} f$ בשני המקרים הבאים:

1. $f: \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{18}$.
2. $f: \mathbb{Z}_{15} \to D_5$.

**רמז** היעזרו בשאלה 5 למציאת הסדרים האפשריים של $\mathrm{Im} f$. לאחר מכן מצאו את כל הת"ח של $H$ מסדרים אלו.

**שימו לב!** לכל אפשרות שמצאתם ל־$\mathrm{Im} f$, יש להראות כי קיים הומומורפיזם $f$ תואם. הדרך הנוחה ביותר להראות קיום היא למצוא הומומורפיזם כזה. בשאלה זו די לציין את ההומומורפיזם $f$, בלא כל הוכחה לגביו.

3. (רשות) מצאו כמה הומומורפיזמים שונים יש בשני מקרים אלו.

**פתרון** ניעזר בשאלה 5. ראשית, נחשב בכל סעיף את ה $\gcd(|G|,|H|)$, ואחר כך נחפש ת"ח ב־$H$ מסדר שמחלק $\gcd$ זה.

1. $\gcd(|\mathbb{Z}_{15}|,|\mathbb{Z}_{18}|)=\gcd(15,18)=3$. אם כן, הסדר של $\mathrm{Im}f$ מחלק את 3. $\mathbb{Z}_{18}$ היא חבורה ציקלית, ולכן יש לה תת־חבורה יחידה מכל סדר. אם כן יש רק שני מחלקים ל־3, ולכל מחלק מתאים פתרון אחד:

- $|\mathrm{Im}f|=3$. ואז $\mathrm{Im}f=\{0,6,12\}=\langle 6\rangle$. למקרה זה מתאימה העתקה $f(n)=6n$, לדוגמא.
- $|\mathrm{Im}f|=1$. ואז $\mathrm{Im}f=\{0\}=\langle 0\rangle$. למקרה זה מתאימה העתקת האפס $f(n)=0$.

2. $\gcd(|\mathbb{Z}_{15}|,|D_5|)=\gcd(15,10)=5$. אם כן, הסדר של $\mathrm{Im}f$ מחלק את 5. ל־$D_5$ יש תת־חבורה יחידה מסדר 5, חבורת הסיבובים $\langle\sigma\rangle$. למקרה זה מתאימה ההעתקה $f(n)=\sigma^n$. כרגיל, יש לה תת־חבורה יחידה מסדר 1, והיא הטריוויאלית $\{id\}$. העתקת האפס מתאימה כאן.

3. את כל ההומומורפיזמים מ־$G$ ל־$H$ ניתן להגדיר על יוצרי $G$. אצלנו, $G$ היא ציקלית, $\mathbb{Z}_{15}$, ונוצרת על ידי האיבר $1$. לכן די להתאים את היוצר הנתון לכל איבר בתמונה המוצעת, ולוודא שזה אכן הומומורפיזם.

- $f\colon\mathbb{Z}_{15}\to\mathbb{Z}_{18}$. במקרה זה $\mathrm{Im}f\subseteq\{0,6,12\}$. לכן ננסה להתאים את היוצר $1$ לכל אחד מאיברים אלו, ונקבל שלושה הומומורפיזמים שונים: השניים שקיבלנו כבר בפתרון, והשלישי $f(n)=12n$.
- $f\colon\mathbb{Z}_{15}\to D_5$. במקרה זה $\mathrm{Im}f\subseteq\langle\sigma\rangle$, ולכן יש לנו חמש אפשרויות: $1\mapsto\sigma^i\quad i=0,1,2,3,4$. ניתן להראות כי כל העתקה כזו מוגדרת היטב. ■

**שאלה 7** נניח כי $f\colon Q_8\to\mathbb{Z}_8$ הומומורפיזם של חבורות.

1. הוכיחו כי $f$ איננו על, ולכן $|\mathrm{Im}f|\neq 8$.
2. מצאו $f$ כזה שיקיים $|\mathrm{Im}f|=2$.
3. (רשות) הראו כי לא יכול להיות $|\mathrm{Im}f|=4$.

**פתרון** $\gcd(|Q_8|,|\mathbb{Z}_8|)=\gcd(8,8)=8$. אם כן, הסדר של $\mathrm{Im}f$ מחלק את 8. $\mathbb{Z}_8$ היא ציקלית, ולכן יש לה תת־חבורה יחידה מכל סדר.

1. $|Q_8|=|\mathbb{Z}_8|=8$. לכן, משיקולי עוצמה, אם $f$ על אז היא גם חח"ע. אם כן, $f$ המבוקשת היא איזומורפיזם, אולם $Q_8\ncong\mathbb{Z}_8$, ולכן אין $f$ כזה.

2. $|\mathrm{Im}f|=2$. ואז $\mathrm{Im}f=\{0,4\}=\langle 4\rangle$, הת"ח היחידה מסדר $2$. במקרה זה הגרעין הוא מסדר $4$. ל־$Q_8$ יש שלוש ת"ח מסדר 4, והן $\langle i\rangle,\langle j\rangle,\langle k\rangle$. נבחר בה"כ $\ker f=\langle i\rangle$. ואז מתקיים $f(\pm 1,\pm i)=0$ ואילו $f(\pm j,\pm k)=4$. ניתן להראות כי זהו הומומורפיזם.

3. $|\mathrm{Im}f|=4$. ואז $\mathrm{Im}f=\{0,2,4,6\}=\langle 2\rangle$. דרך א': במקרה זה אנו מחפשים איבר ב־$Q_8$ שסדרו מתחלק ב־4, כדי שיהיה המקור של $2\in\mathrm{Im}f$. $i\in Q_8$ הוא איבר שכזה, ולכן ננסה בה"כ $f(i)=2$. ואז יתקיים

$$f(-1)=4, f(-i)=6, f(1)=0$$

כעת ננסה לחשב את $f(j)$. מתקיים $2\cdot f(j)=f\left(j^2\right)=f(-1)=4$. ולכן $f(j)\in\{2,6\}$, שהם שורשי 4 בחבורה זו. נפתח בהנחה כי $f(j)=2$. ואז יתקיים $f(k)=f(ij)=f(i)+f(j)=2+2=4$. נקבל כאן ש־

$$f(-1)=f\left(k^2\right)=2f(k)=2\cdot 4=0$$

ובסתירה לכך ש־$f(-1)=4$. סתרנו את ההנחה האחרונה, ולפיכך $f(j)=6$. ואז $f(k)=f(ij)=2+6=0$. נקבל כאן שוב

$$f(-1)=f\left(k^2\right)=2f(k)=2\cdot 0=0$$

וגם זאת בסתירה לכך ש־$f(-1)=4$. אם כן, אין אפשרות למצוא הומומורפיזם $f$ שכזה, ואפשרות זו נפסלת.
דרך ב': במקרה זה הגרעין הוא מסדר 2, ולכן הגרעין הוא $\{\pm 1\}$. מכיוון שריבועו של כל איבר אחר ב־$Q_8$ הוא $-1$, מתקיים לכל $x\in Q_8\setminus\ker f$, $2\cdot f(x)=f\left(x^2\right)=f(-1)=0$. ולכן $f(x)\in\{0,4\}$, שהם שורשי 0 ב־$\mathbb{Z}_8$. לכן אין אף איבר ב־$Q_8$ שתמונתו היא 2, ובסתירה להנחה ש $2\in\mathrm{Im}f$. אי לכך, אפשרות זו נפסלת. $\blacksquare$

## שאלה 8

1. נביט ב־$G=(\mathbb{C}^*,\cdot)$. נסמן פונקציה $f\colon G\to G$ המוגדרת על ידי $f(x)=x^4$. זו העתקה מוגדרת היטב, כי לכל $x\in G$ קיים $y\in\mathbb{C}$ אחד ויחיד כך ש־$f(x)=y$, וכן $y\neq 0$. לכן ניתן לקבוע כי $y\in G$. הוכיחו כי $f$ אפימורפיזם.

2. מצאו חבורה $G$ ותח"נ לא טריוויאלית $\{e\}\neq H\lhd G$ שלה, המקיימות $G/H\cong G$.

**רמז** היעזרו בסעיף 1.

## פתרון

1. $f$ הומומורפיזם: כי

$$f(xy)=(xy)^4=x^4y^4=f(x)f(y)$$

$f$ על: כי לכל $z\in G$ קיים $z^{\frac{1}{4}}\in G$ כך ש־$f\left(z^{\frac{1}{4}}\right)=z$. ביחד זהו אפימורפיזם.

2. ניקח את $G$ מהשאלה הקודמת. $f$ אפימורפיזם, ולכן לפי משפט האיזומורפיזם הראשון מתקיים $G/\ker f\cong G$. לכן ניקח $H=\ker f$. נותר רק להראות כי $H=\ker f$ לא טריוויאלית, ולשם כך מספיק להראות $-1\in\ker f$. אפשר גם ממש לחשב את הגרעין, ולקבל $H=\{\pm 1,\pm i\}$, ולכן זו איננה ת"ח טריוויאלית. $\blacksquare$