## חזרה

**הנחה קבועה:** $(X,S,\mu)$ ממ"ח, וכאשר נדבר על קבוצה מדידה, הכוונה היא לקבוצה ב$S$, ופונקציה מדידה היא פונקציה מדידה לגבי $S$.

**הגדרה:** פונקציה פשוטה היא פונקציה $\varphi : X \to \mathbb{R}$ שהיא מדידה ומקבלת מספר סופי של ערכים.

**שקול:** $\varphi$ צירוף לינארי סופי של אינדיקטורים $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$ כאשר $\forall_k E_k \in S$.

"ההצגה הקנונית של $\varphi$" מתקבלת כך: נרשום את הערכים השונים $a_1, \ldots a_n$ שמהווים את הטווח של $\phi$. לכל $a_k$ נתאים קבוצה מדידה

$$E_k = \varphi^{-1}(a_k) = \{x \in X | \varphi(x) = a_k\}$$

ה$E_k$ זרות בזוגות, ואז

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}(x)$$

וזו ההצגה הקנונית של $\varphi$.

עבור $\varphi$ כנ"ל שהיא לא־שלילית $\varphi \geq 0$, אז כל $a_k \geq -$ ונגדיר

$$\int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k)$$

כאשר מוסכם: אם $a_k = 0$ ואם $\mu(E_k) = +\infty$ אז $a_k \cdot \mu(E_k) = 0$. לכן $\int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu$ מוגדר היטב, ומתקיים

$$0 \leq \int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu \leq \infty$$

---

אם $E \subset X$ מדידה, אפשר להגדיר

$$\int_E \varphi \,\mathrm{d}\mu$$

ע"י

$$\int_X \varphi I_E \,\mathrm{d}\mu$$

<u>או</u>: אפשר לכתוב את $\varphi|_E$ ע"י $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k I_{E_k \cap E}$, וממילא

$$\int_E \varphi \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k \cup E)$$

קל להוכיח ששתי ההגדרות שקולות.

## משפט 1

נניח ש$0 \leq \varphi = \sum\limits_{j=1}^{n} a_k I_{E_j}$ היא פונקציה פשוטה, כאשר ה$E_j$ זרות בזוגות(אבל ההצגה לאו דווקא קנונית). אזי

$$\int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu\left(E_j\right)$$

## הוכחה

יהיו $b_1, b_2, \ldots b_m$ הערכים השונים שבטווח של $\varphi$. כיוון שלכל $x \in E_j$, $\varphi\left(x\right) = a_j$, אז בהכרח כל $a_j$ שווה לאיזה $b_k$.

כעת, עבור $k = 1, 2, \ldots m$, נגדיר $S_k = \left\{x \in X | \varphi\left(x\right) = b_k\right\}$. אז

$$E = \biguplus_{a_j = b_k} E_j$$

וכיוון שהאיחוד זר

$$\mu\left(S_k\right) = \sum_{a_j = b_k} \mu\left(E_j\right)$$

לפי הבנייה שלנו, ההצגה הקנונית של $\varphi$ היא

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} b_k I_{S_k}$$

מכאן ש

$$\int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{m} b_k \mu\left(S_k\right) = \sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{a_j = b_k} \mu\left(E_j\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{a_j = b_k} b_k \mu\left(E_j\right) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{a_j = b_k} a_j \mu\left(E_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu\left(E_j\right)$$

$\blacksquare$

## משפט 2

יהיו $\varphi, \psi \geq 0$ פונקציות פשוטות, ו$\alpha \geq 0$ קבוע. אזי:

א. $\int_X \alpha\varphi \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu$.

ב. $\int_X (\varphi+\psi)\,\mathrm{d}\mu = \int_X \varphi\,\mathrm{d}\mu + \int_X \psi\,\mathrm{d}\mu$.

ג. אם $E,F\in S$ ואם $E\cap F=\emptyset$ אזי $\int_{E\uplus F}\varphi\,\mathrm{d}\mu = \int_E \varphi\,\mathrm{d}\mu + \int_F \varphi\,\mathrm{d}\mu$.

ד. אם $0\le\varphi\le\psi$ אזי $0\le\int_X\varphi\,\mathrm{d}\mu\le\int_X\psi\,\mathrm{d}\mu$.

ה. אם $E\in S$ ואם לכל $x\in E$ $m\le\varphi(x)\le M$, אז $m\mu(E)\le\int_E\varphi\,\mathrm{d}\mu\le M\mu(E)$,
ואם $\mu(E)=0$ אז $\int_E\varphi\,\mathrm{d}\mu=0$.

## הוכחה

א. נרשום את ההצגה הקנונית של $\varphi$ ע"י $\varphi=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kI_{E_k}$, אז $\alpha\varphi=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha a_kI_{E_k}$, לכן לפי הגדרה

$$\int_X \alpha\varphi\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n}\alpha a_k\mu(E_k) = \alpha\sum_{k=1}^{n}a_k\mu(E_k) = \alpha\int_X\varphi\,\mathrm{d}\mu$$

ב. נרשום הצגות קנוניות

$$\varphi=\sum_{k=1}^{n}a_kI_{E_k}\qquad\psi=\sum_{j=1}^{m}b_jI_{f_j}$$

כיוון ש$E_k$ ו$F_j$ זרות בזוגות, גם הקבוצות $E_k\cap F_j$ זרות בזוגות, ובקבוצה $E_k\cap F_j$
$\varphi(x)=a_k$ ו$\psi(x)=b_j$ ויחד נקבל $(\varphi+\psi)(x)=a_k+b_i$.
לפי משפט 1

$$\int_X(\varphi+\psi)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j,k}(a_k+b_j)\,\mu(E_k\cap F_j) = \sum_{j,k}a_k\mu(E_k\cap F_j)+\sum_{j,k}b_j\mu(E_k\cap F_j) = \cdots$$

ולפי משפט 1 זה יוצא

$$\cdots = \int_X\varphi\,\mathrm{d}\mu + \int_X\psi\,\mathrm{d}\mu$$

והוכחנו את 2.

ג. כיוון ש$E\cap F=\emptyset$, $I_{E\cup F}(x)=I_E(x)+I_F(x)$. כמו כן $\varphi I_{E\cup F}=\varphi I_E+\varphi I_F$.
נובע ש

$$\int_{E\uplus F}\varphi\,\mathrm{d}\mu = \int_X\varphi I_{E\cup F}\,\mathrm{d}\mu = \int_X(\varphi I_E+\varphi I_F)\,\mathrm{d}\mu = \cdots$$

ולפי סעיף ב'

$$\cdots = \int_X\varphi I_E\,\mathrm{d}\mu + \int_X\varphi I_F\,\mathrm{d}\mu = \int_E\varphi\,\mathrm{d}\mu + \int_F\varphi\,\mathrm{d}\mu$$

ד. נתון $0 \leq \varphi \leq \psi$. אם $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$ אז $\int \varphi \delta\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu\left(E_k\right) \geq 0$. כמו כן אם $0 \leq \varphi \leq \psi$ אזי $\psi = \varphi + \underbrace{(\psi - \varphi)}_{\geq 0}$, כאשר גם $\psi - \varphi$ פשוטה. לפי סעיף ב',

$$\int \psi = \int \varphi + \underbrace{\int (\psi - \varphi)}_{\geq 0} \geq \int \varphi$$

ה. נתון שלכל $x \in E$, $m \leq \varphi\left(x\right) \leq M$. לפי סעיף ד',

$$\int_E m \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E \varphi \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E M \,\mathrm{d}\mu$$

$$\int_X m I_E \leq \int_E \varphi \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X M I_E \,\mathrm{d}\mu$$

$$m\mu\left(E\right) \leq \int_E \varphi \,\mathrm{d}\mu \leq M\mu\left(E\right)$$

ואם $\mu\left(E\right) = 0$ נרשום $\varphi\left(x\right) \leq M \leq \infty$, ולפי אי השוויון הקודם

$$0 \leq \int_E \varphi \,\mathrm{d}\mu \leq M\mu\left(E\right) = M - 0 = 0$$

לכן

$$\int_E \varphi \,\mathrm{d}\mu = 0$$

## מסקנה 1

אם $\varphi_1, \ldots \varphi_n \geq 0$ פשוטות ואם $a_1, \ldots a_n \geq 0$ קבועים,

$$\int_X \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_X \varphi_k \,\mathrm{d}\mu$$

**הוכחה:** ע"פ סעיף א' וב' +אינדוקציה.

## מסקנה 2

אם $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$ $(a_k \geq 0)$, $\varphi$ פשוטה בהצגה כלשהי, אז

$$\int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu\left(E_k\right)$$

### הוכחה

לפי מסקנה 1

$$\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_X I_k \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu\left(E_k\right)$$

■

## מסקנה 3

אם $E = \biguplus_{k=1}^{n} E_k$ מדידות ואם $\varphi \geq 0$ פשוטה, אז

$$\int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} \varphi \, \mathrm{d}\mu$$

**הוכחה:** ע"פ סעיף ג' באינדוקציה.

## הגדרה

תהי $f : X \to [0, \infty]$ פונקציה מדידה. אז נגדיר

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq f \\ \varphi \text{ is simple}}} \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu$$

"sup" תמיד מוגדר כמספר ב$[0, \infty]$
אם $E \subset X$ מדידה יש שתי הגדרות שקולות:

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{\substack{0 \leq \varphi(x) \leq f(x) \\ x \in E}} \int_E \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int_X f I_E \, \mathrm{d}\mu$$

נעיר שאם $\varphi \geq 0$ פשוטה יש לנו שתי הגדרות ל$\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu$:

א. ההגדרה המקורית $\sum a_k \mu\left(E_k\right)$

ב. $\int_X \psi \, \mathrm{d}\mu \quad \sup_{\substack{0 \leq \psi \leq \varphi \\ \psi \text{ is simple}}}$

**תרגיל:** להראות שהן שוות.

## משפט 3

יהיו $f,g:X\to[0,\infty]$ מדידות ו$c>0$ קבוע. אזי:

א. אם $0\le f\le g$ אז $0\le\int_X f\,\mathrm{d}\mu\le\int_X g\,\mathrm{d}\mu$.

ב. אם $A\subset B\subset X$ מדידות אז $\int_A f\,\mathrm{d}\mu\le\int_B f\,\mathrm{d}\mu$.

ג. $\int_X cf\,\mathrm{d}\mu=c\int_X f\,\mathrm{d}\mu$.

ד. אם $f(x)\equiv0$ ב$E\in S$ אז $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=0$(אפילו אם $\mu(E)=\infty$).

ה. אם $\mu(E)=0$ אז $\int_E f\,\mathrm{d}\mu=0$(אפילו אם $f(x)=\infty$ ב$E$).

ו. אם $m\le f(x)\le M$ ב$E$ אז $m\mu(E)\le\int_E f\,\mathrm{d}\mu\le M\mu(E)$ וגם $\int_E c\,\mathrm{d}\mu=c\mu(E)$.

### הוכחה

א. $\int_X f\,\mathrm{d}\mu=\sup\limits_{\substack{0\le\varphi\le f\\ \varphi\text{ is simple}}}\int_X\varphi\,\mathrm{d}\mu$ ולפי המשפט הקודם לכל $\varphi(x)\ge0$, $\int_X\varphi\,\mathrm{d}\mu\ge0$, וממילא $\int f\ge0$.

יתר על כן אם $0\le f\le g$ אז כל $\varphi$ כך ש$\varphi\le f$ מקיימת $\varphi\le g$. לכן $\int_X g\,\mathrm{d}\mu=\sup$ של אינטגרלים של יותר פונקציות $\varphi$ וממילא $\int f\le\int g$.

ב. אם $A\subset B$ אז $I_A\le I_B$. לכן עבור $f\ge0$ $fI_A\le fI_B$, ונובע מסעיף א':

$$\int_A f\,\mathrm{d}\mu=\int_X fI_A\,\mathrm{d}\mu\le\int_X fI_B\,\mathrm{d}\mu=\int_B f\,\mathrm{d}\mu$$

ג. עבור $c>0$

$$\int_X cf\,\mathrm{d}\mu=\sup_{\substack{0\le\varphi\le cf\\ \varphi\text{ is simple}}}\int_X\varphi\,\mathrm{d}\mu=\sup_{0\le\frac{1}{c}\varphi\le f}c\int_X\frac{1}{c}\varphi=c\sup_{0\le\frac{1}{c}\varphi\le f}\int_X\frac{1}{c}\varphi\,\mathrm{d}\mu=c\int_X f\,\mathrm{d}\mu$$

ד. אם $f(x)\equiv0$ ב$E$, אז

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu=\int_E 0\,\mathrm{d}\mu=0$$

כי "0" פונקציה פשוטה והאינטגרל שלה ידוע.

ה. אם $\mu(E)=0$ אז

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu=\sup_{\substack{0=\varphi\le f\\ \text{on }E}}\int_E\varphi\,\mathrm{d}\mu$$

עבור $\varphi$ פשוטה כבר ידענו שכאשר $\mu(E)=0$, $\int_E\varphi\,\mathrm{d}\mu$. נובע ש$\int_E f\,\mathrm{d}\mu=0$.

ו. אם $m \le f(x) \le M$ ב$E$ אז לפי סעיף א'

$$\int_E m \, \mathrm{d}\mu \le \int_E f \, \mathrm{d}\mu \le \int_E M \, \mathrm{d}\mu$$

ז.א.

$$m\mu(E) \le \int_E f \, \mathrm{d}\mu \le M \, \mathrm{d}\mu$$

כמו כן

$$\int_E c \, \mathrm{d}\mu = \int_X cI_E \, \mathrm{d}\mu = c\mu(E)$$

■

## משפט 4(משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג)

נניח שלכל $n$ מוגדרת היטב ומדידה $f_n : X \to [0, \infty]$, ונניח שלכל $x \in X$

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x) \le \cdots$$

אזי מוגדרת ומדידה

$$f(x) = \sup f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

ומתקיים

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

### הוכחה

נגדיר

$$\alpha = \int_X f \, \mathrm{d}\mu \qquad \beta = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

$\alpha$ מוגדר היטב כי $f \ge 0$ ומדידה. $\beta$ מוגדר היטב כי כאשר ה$f_n$ עולות עם $n$, $\int f_n$ עולים עם $n$, ולכן $\beta$ גבול של סדרה עולה של מספרים שתמיד קיים במובן הרחב.

צ"ל $\alpha = \beta$.

תחילה נראה ש$\alpha \le \beta$. אבל כיוון ש$f_n$ עולות ל$f$, לכל $n$ ולכל $x \in X$ $f_n(x) \le f(x)$. לפי משפט 3, לכל $n$ $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \le \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. מכאן נובע ש

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \le \int_X f \, \mathrm{d}\mu = \alpha$$

נותר להוכיח ש$\beta \le \alpha$. אבל $\alpha = \int_X f \, \mathrm{d}\mu = \sup_{0=\varphi\le f} \int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu$, לכן מספיק להוכיח שאם $f \le \varphi \le 0$($\varphi$ פשוטה) אז $\int_X \varphi \, \mathrm{d}\mu \le \beta$. לכן ניקח $\varphi$ פשוטה כך שלכל $x \in X$, $0 \le \varphi(x) \le f(x)$, ונפריד שני מקרים:

**מקרה 1:** $\int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = +\infty$. צ"ל $\beta \geq \int_X \varphi = \infty$, ז.א. $\beta = \infty$.

כעת, כיוון ש$\int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = +\infty$, בהכרח קיים $A$ מדידה כך ש$\mu(A) = +\infty$ ולכל $x \in A$ $\varphi(x) \equiv c > 0$, וכיוון ש$0 \leq \varphi \leq f$, לכל $x \in A$ $f(x) \geq \varphi(x) \geq c$.

לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $A_n = \{x \in A | f_n(x) > c/2\}$. כיוון ש$\{f_n\}$ עולות, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, וכיוון ש$f_n(x)$ עולה ל$f(X)$ ב$c \equiv$ ב$A$, אז לכל $x \in A$ קיים איזה $n$ כך ש$f_n(x) > c/2$ וממילא $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ כיוון ש$A_n$ עולות ו$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A) = \infty$.

כעת לכל $n$

$$\beta \geq \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{A_n} f_n \,\mathrm{d}\mu > \int_{A_n} c/2 \,\mathrm{d}\mu = \frac{c}{2}\mu(A_n)$$

נובע ש

$$\beta \geq \lim_{n\to\infty} c/2\mu(A_n) = \frac{c}{2}\infty = \infty$$

והוכחנו ש$\beta \geq \int \varphi$ במקרה $f\varphi = \infty$

**מקרה 2:** $0 \leq \varphi \leq f$ ו$\int_X \varphi < \infty$. צ"ל $\beta \geq \int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu$. ובכן: נגדיר

$$A = \{x \in X | \varphi(x) > 0\}$$

$$\mu(A) < \infty \Longleftarrow \int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

ומתקיים

$$\int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int_A \varphi \,\mathrm{d}\mu$$

כעת, יהי $\varepsilon > 0$ נתון. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר

$$A_n = \{x \in A | f_n(x) > (1-\varepsilon)\varphi(x)\}$$

כיוון ש$\{f_n\}$ עולות, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$. יתר על כן, לכל $x \in A$

$$f(x) \geq \varphi(x) > (1-\varepsilon)\varphi(x)$$

לכן קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש$f_n(x) > (1-\varepsilon)\varphi(x) \Longleftarrow x \in A_n$.

יוצא כמו קודם ש$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_n$ ו$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

לכל $n$:

$$A = A_n \biguplus (A - A_n)$$

$$\mu(A)=\mu(A_n)+\mu(A-A_n)$$

$$\mu(A_n)\le\mu(A)<\infty$$

ולכן

$$\mu(A-A_n)=\mu(A)-\mu(A_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

נבחר $n$ מסויים כך ש-$\mu(A-A_n)<E$ ונסמן $\infty>M=\max\limits_{x\in X}\varphi(x)$.

לבסוף: לאותו $n$,

$$\beta\ge\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu\ge\int_{A_n}f_n\,\mathrm{d}\mu\ge\int_{A_n}(1-\varepsilon)\varphi\,\mathrm{d}\mu=(1-\varepsilon)\int_{A_n}\varphi\,\mathrm{d}\mu=$$

$$=(1-\varepsilon)\left[\int_A\varphi\,\mathrm{d}\mu-\int_{A-A_n}\varphi\,\mathrm{d}\mu\right]\ge(1-\varepsilon)\left[\int_A\varphi\,\mathrm{d}\mu-M\mu(A-A_n)\right]\ge$$

$$\ge(1-\varepsilon)\left[\int_X\varphi\,\mathrm{d}\mu-M\varepsilon\right]$$

נשאיף $\varepsilon\to 0$ להסיק $\beta\ge\int_X\varphi\,\mathrm{d}\mu$.

הדבר נכון לכל $f\le\varphi$, ולכן $\beta\ge\alpha$.

■

## משפט 5(למת פאטו)

לכל $n$ נניח ש-$f_n:X\to[0,\infty]$ מדידה. נגדיר $g(x)=\underline{\lim}f_n(x)$. אזי $g(x)\ge 0$ ומדידה, ומתקיים

$$\int_X g\,\mathrm{d}\mu\le\underline{\lim}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$$

(במילים אחרות:$\int_X\underline{\lim}f_n\,\mathrm{d}\mu\le\underline{\lim}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$)

### הוכחה

כיוון שכל $f_n(x)\ge 0$, פשוט ש-$g(x)=\underline{\lim}f_n(x)\ge 0$, ו-$g$ מדידה ע"פ משפט מהפרק הקודם.

כידוע, $g(x)=\sup\limits_k\inf\limits_{n\ge k}f_n(x)$.

לכל $k\in\mathbb{N}$ נגדיר $g_k(x)=\inf\limits_{n\ge k}f_n(x)$. לכן $g_k(x)\ge 0$ מדידות ועולות עם $k$, ולכן לכל $k$ ולכל $x$ $g_k(x)\le f_k(x)$.

כיוון ש־$g_k$ עולות, משפט 4 אומר

$$\int_X g\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty}\int_X g_k\,\mathrm{d}\mu = \underline{\lim}\int_X g_k\,\mathrm{d}\mu \leq \underline{\lim}\int_X f_k\,\mathrm{d}\mu$$

כי כל $g_k \leq f$.

■