מבנים אלגבריים - תירגול 2

19 במרץ 2019

1 החבורה $\mathbb{Z}_n$

על $\mathbb{Z}$ נגדיר יחס $\sim$ באופן הבא:

$$a \sim b \iff n|a-b$$

טענה: זהו יחס שקילות.
הוכחה: רפלקסיביות: לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים: $n|0 = a-a$.
סימטריות: אם $a \sim b$ אז $n|a-b$ ולכן כמובן $n|-(a-b) = b-a$ מה שאומר $b \sim a$.
טרנזיטיביות: אם $a \sim b \wedge b \sim c$ זאת אומרת ש- $n|a-b \wedge n|b-c$. נשים לב שאם n מחלק שני מספרים אז גם את הסכום שלהם (כלומר, אם $n|t \wedge n|s$ ז"א $t = kn, s = mn, k, m \in \mathbb{Z}$ ולכן $t+s = (k+m)n$ מה שאומר ש- $n|t+s$), ולכן אצלנו נקבל: $n|(a-b)+(b-c) = a-c$ ולכן $a \sim c$.
מצויין, אז יש לנו יחס שקילות על $\mathbb{Z}$, מה עכשיו? כשיש יחס שקילות, אנחנו מתעניינים לא באיברים עצמם אלא במחלקות השקילות:

$$[a] := \{b \in \mathbb{Z} | a \sim b\}$$

במילים: מחלקת השקילות של מספר מסוויים a זזה אוסף כל המספרים שמתייחסים אליו, ששקולים לו. לדוגמא: $[0] = \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, \dots\}, [1] = \{\dots, -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, \dots\}$.
עכשיו אנחנו מתעניינים באוסף מחלקות השקילות הלא ה יא קבוצת המנה:

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/\sim = \{[a] | a \in \mathbb{Z}\}$$

כידוע, מחלקות השקילות של איברים הן שוות כאשר הם שקולים וזרות כשלא, ולכן נקבל שיש לנו כאן סה"כ n מחלקות שקילות שונות. כלומר:

$$\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$$

מה חסר? להגדיר על הקבוצה הזו פעולה ולהראות שהיא חבורה. נגדיר את הפעולה הבאה:

$$[a] \star [b] = [a+b]$$

כיון שמדובר על מחלקות שקילות צריך להראות שהפעולה מוגדרת היטב. כלומר, מחלקת שקילות מוגדרת לפי נציג ספציפי, למשל $[0]$ מוגדרת כאן לפי 0, ואפשר גם לפי $[n]$, זה

אותו איבר. צריך לוודא שזה לא משנה איזה נציג נבחר. פורמאלית: צריך להראות שאם $a\sim a', b\sim b'$ אז $[a+b]=[a'+b']$. ואכן: מהעובדה ש־ $a\sim a'$ נקבל $n|a-a'$, וכמו כן $n|b-b'$, ולכן מחלק גם את הסכום: $n|(a-a')+(b-b')=(a+b)-(a'+b')$, ולכן $a+b\sim a'+b'$ מהשאומר $[a+b]=[a'+b']$. קל מאד לרקאות שהפעולה הזו מגדירה חבורה, איבר היחידה הוא $[0]$, וההופכי של $[a]$ זה $[n-a]=[-a]$.

2 חילופיות ומרכז של חבורה

הגדרה: תהא G חבורה. איברים $a,b\in G$ יקראו מתחלפים אם $ab=ba$. למשל: מחזורים זרים ב S_n. למשל כל שני איברים ב $\mathbb{Z}$.
הגדרה: G תקרא חבורה חילופית אם כל שני איברים מתחלפים. למשל $\mathbb{Z},\mathbb{R}$. למשל S_3 אינה חילופית כי ראינו ש $(1,2)\,(2,3)\neq(2,3)\,(1,2)$(ולכן גם S_n עבור $n>3$ אינה חילופית).
הגדרה : תהא G חבורה אזי המרכז שלה $C(G)=\{g\in G:\ \forall x\in G\, gx=xg\}$
הערה: תהא G חבורה. אזי Gחילופית אמ"מ $C(G)=G$. למשל המרכז של $\mathbb{Z}$ הוא $\mathbb{Z}$.
הגדרה (חבורת הסיבובים והשיקופים) לכל n טבעי נגדיר $\sigma=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\end{pmatrix}$ מטריצת סיבוב ב $\frac{2\pi}{n}$ רדיאנים ו $\tau=\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}$שיקוף ביחס לציר x. ונגדיר D_nלהיות חבורת הסיבובים והשיקופים להיות החבורה שאיבריה הם מכפלות סופיות של τ ו σ.
נשים לב כי $\tau^2=\sigma^n=id$ ולכן $\tau^{-1}=\tau,\sigma^{-1}=\sigma^{n-1}$. בנוסף מתקיים כי $\sigma\tau=\tau\sigma^{-1}$ (ולכן לכל j טבעי $\sigma^j\tau=\tau\sigma^{-j}$) ולכן $D_n=\left\{\tau^i\sigma^j:\ i\in\{0,1\},j\in\{0,1,\ldots,n-1\}\right\}$.
נשים לב כי אם $n>2$ אזי $\sigma^{-1}\neq\sigma$ ולכן החבורה לא חילופית.
תרגיל: מהו המרכז של $D_4=\left\{\tau,\tau\sigma,\tau\sigma^2,\tau\sigma^3,id,\sigma,\sigma^2,\sigma^3\right\}$?
פתרון: יהא $x=\tau^i\sigma^j$ במרכז . אזי בפרט $x\sigma=\sigma x$ ולכן $\tau^i\sigma^{j+1}=\sigma\tau^i\sigma^j$ נכפיל ב σ^{-j} משמאל ונקבל $\tau^i\sigma=\sigma\tau^i$ ולכן $i=0$ (עבור $i=1$ נקבל סתירה) ולכן $x=\sigma^j$. בנוסף $\tau x=x\tau$ אמ"מ $\tau\sigma^{-j}=\sigma^j\tau=\tau\sigma^j$ אמ"מ $\sigma^j=\sigma^{-j}$ אמ"מ $\sigma^{2j}=id$. זה מתקיים עבור $j=0$ או $j=2$. כלומר קיבלנו $C(D_4)\subseteq\left\{id,\sigma^2\right\}$ ואפשר לוודא שקיים שיוויון.
בקצרה: הזהות, איבר היחידה, תמיד במרכז. לגבי σ^2, ברור ש־ σ^2 מתחלף עם σ^j, ובנוסף קל לראות שמתחלף עם τ, ובזכות זה גם עם $\tau\sigma^j$.