שיעורי בית 1

4 בנובמבר 2015

1. הצג את התמורות הבאות באמצעות מחזורים זרים.

(א) $$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(ב) $$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

פתרון: $a = (1\,6)\,(2\,5)\,(3\,4), b = (1\,2)\,(4\,5)\,(3\,6)$

2. חשבו: $a^2\ , b^2, bab^{-1}, ab$

פתרון: מכיוון שהצלחנו לפרק אותם למחזורים זרים מאורך שניים יתקיים $b = b^{-1}$ $.a = a^{-1}$

ואז : $a^2 = b^2 = e$ $\ bab^{-1} = bab = (1\,4)\,(5\,6)\,(3\,2)$ $\ ab = (1\,5\,3)\,(2\,6\,4)$

3. תהא $\sigma \in S_n$. ותהא $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ ההצגה שלה כמכפלה של מחזורים זרים. הוכח כי

(א) $\sigma^{-1} = \tau_1^{-1} \cdots \tau_m^{-1}$

(ב) $\sigma^k = \tau_1^k \cdots \tau_m^k$ לכל k טבעי.

פתרון: מתקיים כי $\sigma^{-1} = \tau_m^{-1} \cdots \tau_1^{-1}$ כי $\tau_1 \cdots \tau_m \tau_m^{-1} \cdots \tau_1^{-1} = id$. בנוסף, המספרים המופיעים ב τ_i הם אותם מספרים המופיעים ב τ_i^{-1} ולכן המחזורים $\tau_m^{-1}, \ldots, \tau_1^{-1}$ זרים ולכן מתחלפים. ומכאן נקבל

$$\sigma^{-1} = \tau_m^{-1} \cdots \tau_1^{-1} = \sigma^{-1} = \tau_1^{-1} \cdots \tau_m^{-1}$$

בשיקול דומה, כיוון ש $\tau_1, \ldots, \tau_m$ זרים הם מתחלפים ולכן אפשר לקבץ אותם. כלומר

$$\sigma^k = (\tau_1 \cdots \tau_m)\,(\tau_1 \cdots \tau_m) \cdots (\tau_1 \cdots \tau_m) = (\tau_1 \cdots \tau_1)\,(\tau_2 \cdots \tau_2) \cdots (\tau_m \cdots \tau_m) = \tau_1^k \cdots \tau_m^k$$

(ג) הראה שהשיוויונות לעיל לא מתקיימים בהכרח בחבורה כללית. כלומר: תהא G חבורה. ויהא $g = x_1 \cdots x_m \in G$ מצא דוגמא המקיימות

i. $g^{-1} \neq x_1^{-1} \cdots x_m^{-1}$

ii. $g^k \neq x_1^k \cdots x_m^k$

פתרון: נתסכל על S_3 $(1,2,3) = (1,2)(2,3) \in$ מתקיים

$$(1,2,3)^{-1} = (3,2,1) \neq (1,2)^{-1}(2,3)^{-1} = (1,2)(2,3) = (1,2,3)$$

וגם

$$(1,2,3)^2 = (1,3,2) \neq (1,2)^2(2,3)^2 = id$$

(ד) מצא את התנאים ששיוויונות אלו כן יתקיימו, כלומר שכן מתקיים

i. $g^{-1} = x_1^{-1} \cdots x_m^{-1}$

ii. $g^k = x_1^k \cdots x_m^k$

פתרון: מספיק שהאברים $x_1, x_2, \dots x_m$ יתחלפו זה עם זה.

עבור הסעיף השני, זה מיידי.

עבור הסעיף הראשון, נראה כי אם $x_1, x_2, \dots x_m$ מתחלפים זה עם זה אז גם ההופכים. אכן אם $x_i x_j = x_j x_i$ אז אם נהפוך את שני הצדדיים נקבל

$$x_j^{-1} x_i^{-1} = (x_i x_j)^{-1} = (x_j x_i)^{-1} = x_i^{-1} x_j^{-1}$$

4. עבור $\sigma \in S_n$ ומחזור $(i_1, i_2, \dots i_m) \in S_n$ הוכח כי מתקיים השיוויון הבא

$$\sigma (i_1, i_2, \dots i_m) \sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_m))$$

פתרון : ע"י הכפלה מימין ב σ ומשמאל ב σ^{-1} שקול להוכיח כי

$$(i_1, i_2, \dots i_m) = \sigma^{-1} (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_m)) \sigma$$

יהא $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ צריך להוכיח כי שתי הפונקציות (משני צידי השיוויון) מעתיקות אותו לאותו מספר.

אם $x \in \{i_1, \dots i_m\}$ אזי $x = i_k$ כלשהוא ואז

$$\sigma^{-1} (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_m)) \sigma(i_k) = \sigma^{-1} (\sigma(i_{k+1})) = i_{k+1}$$

(אם $k=m$ אז נחליף את $m+1$ ב־1)

ומצד שני

$$\left(i_1,i_2,\dots i_m\right)\left(i_k\right)=i_{k+1}$$

ויש שיוון.

אם $x\notin\left\{i_1\dots i_m\right\}$ אזי

$$\sigma^{-1}\left(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots,\sigma(i_m)\right)\sigma(x)=\sigma^{-1}\sigma(x)=x$$

התמורה $\left(\sigma(i_1),\sigma(i_2),\dots,\sigma(i_m)\right)$ שולחת את $\sigma(x)$ לעצמו כי אחרת $\sigma(x)=\sigma(i_k)$ וכיוון שזוהי תמורה (בפרט חח"ע) זה גורר כי $x=i_k$ סתירה.

ומצד שני

$$\left(i_1,i_2,\dots i_m\right)(x)=x$$

5. תרגיל מודרך: טענה־ קיימות $\sigma_1,\sigma_2\in S_n$ כך שכל $\sigma\in S_n$ ניתן להציג כמכפלה שלהם והופכיהם.

כלומר $\sigma=\prod_{i=1}^{N}\tau_i$ כאשר לכל i מתקיים $\tau_i\in\left\{\sigma_1,\sigma_1^{-1},\sigma_2,\sigma_2^{-1}\right\}$.

אנחנו נעבוד עם $\sigma_1=\left(1,2,3,\dots,n\right),\sigma_2=\left(1,2\right)$.

(א) הראה כי כל חילוף מהצורה $(1,i)$ ניתן להציגו ע"י ע"י σ_1,σ_2 והופכיהן. (רמז: תרגיל 4 יכול להיות לעזר

פתרון : יהיה $(1,i)$ חילוף. מתקיים

$\tau=\sigma_2\sigma_1=(2,3\dots,n)$ ואז $\tau^{i-2}(2)=i$ בנוסף $\tau^{i-2}(1)=1$.

נסמן $\tau^{i-2}=\tau'$ ואזי לפי תרגיל 4 מתקיים $\tau'\sigma_2\left(\tau'\right)^{-1}=\left(\tau'(1),\tau'(2)\right)=(1,i)$.

(ב) הראה שכל חילוף (i,j) ניתן להביעו בעזרת $\left\{(1,k)\right\}_{k>2}$

פתרון : מתקיים כי $(1.i)\,(1,j)\,(1.i)=(i,j)$

(ג) הוכח את הטענה.

פתרון : כל $\sigma\in S_n$ ניתן להציגה כמכפלה של חילופים. לפי סעיפים קודמים:

כל חילוף נביע בעזרת מכפלה של שתי חילופים $(1,k)\,(i,k')$.

כל מכפלה כזאת נביע באמצעות $\tau'\sigma_2\left(\tau'\right)^{-1}$ שזה אכן מכפלה שמעורבים בה רק תמורות מתוך $\left\{\sigma_1,\sigma_1^{-1},\sigma_2,\sigma_2^{-1}\right\}$.