תורת המספרים האלגברית (88798) תשפ"א
תרגיל 9

1. יהי K שדה שלם תחת הערכה לא־ארכימדית ותהי L/K הרחבה אלגברית. הוכח כי L שלם אם ורק אם $[L:K]<\infty$.

2. הוכח את הטענה הבאה, שנקראת הלמה של קרסנר. יהי K שדה הנזלי ויהי $\overline{K}$ סגור אלגברי. יהי $\alpha=\alpha_1\in\overline{K}$ ספרבילי מעל K ויהיו $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ הצמודים של α. יהי $\beta\in\overline{K}$ ונניח כי $|\alpha-\beta|<|\alpha-\alpha_i|$ לכל $2\le i\le r$. אזי $K(\alpha)\subseteq K(\beta)$.

   רמז: נניח שלא. אזי קיים שיכון $\sigma:K(\alpha,\beta)\hookrightarrow\overline{K}$ כך ש־ $\sigma(\beta)=\beta$ אך $\sigma(\alpha)\neq\alpha$. דרך אגב, אפשר להוכיח ששדה K הינו הנזלי אם ורק אם הלמה של קרסנר נכונה עבורו.

3. יהי K שדה הנזלי, ויהי $\mathcal{O}$ חוג ההערכה שלו. יהי $f(x)\in\mathcal{O}[x]$ פונינום מתוקן אי־פריק וספרבילי. יהי $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$. הוכח שקיים $\varepsilon>0$ כך שאם $g(x)=\sum_{k=0}^n b_kx^k\in K[x]$ כך ש־ $|a_k-b_k|<\varepsilon$ לכל k, אזי $g(x)$ גם אי־פריק וספרבילי ומתקיים $K[x]/(f)=K[x]/(g)$.

   רמז: היעזר בלמה של קרסנר, שים לב שאם β הינו שורש של g, אזי $|f(\beta)-g(\beta)|=|f(\beta)|$.

4. (א) הוכח שהסגור האלגברי $\overline{\mathbb{Q}}$ בן מניה.

   (ב) הוכח כי $\overline{\mathbb{Q}}$ צפוף ב־ $\overline{\mathbb{Q}_p}$.

   (ג) יהי $\alpha_1,\alpha_2,\dots$ מספור של האיברים של $\overline{\mathbb{Q}}$. תהי $\mathbb{C}_p=\widehat{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ ההשלמה של $\overline{\mathbb{Q}_p}$. תהי $\{\varepsilon_n\}$ סדרה יורדת ממש של מספרים ממשיים כך ש־ $\frac{1}{2}<\varepsilon_n<1$ לכל n. לכל $a,b\in\mathbb{C}_p$ נגדיר $a\sim_1 b$ אם ורק אם $|a-b|\le\varepsilon_1$. הוכח שזה יחס שקילות ושקיימת מחלקת שקילות B_1 כך ש־ $\alpha_1\notin B_1$.

   (ד) לזוג איברים $a,b\in B_1$ נגדיר $a\sim_2 b$ אם ורק אם $|a-b|\le\varepsilon_2$. הוכח שזה יחס שקילות ושקיימת מחלקת שקילות B_2 כך ש־ $\alpha_2\notin B_2$.

   (ה) נמשיך כך: בהינתן כדור סגור B_{n-1} בעל רדיוס ε_{n-1}, הוכח שקיים כדור סגור $B_n\subset B_{n-1}$ בעל רדיוס ε_n כך ש־ $\alpha_n\notin B_n$.

   (ו) נניח שקיים $b\in\bigcap_{n=1}^\infty B_n$. הוכח כי
   $$B_n=\{a\in\mathbb{C}_p:|a-b|\le\varepsilon_n\}$$
   לכל $n\in\mathbb{N}$.

   (ז) הוכח כי $\alpha_n\notin\{a\in\mathbb{C}_p:|a-b|<\frac{1}{2}\}$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

   (ח) הוכח כי $\overline{\mathbb{Q}}$ צפוף ב־ $\mathbb{C}_p$, בסתירה לסעיף הקודם. הסק $\bigcap_{n=1}^\infty B_n=\varnothing$, כלומר הלמה של קנטור לא נכונה עבור $\mathbb{C}_p$.

5. יהי K שדה שלם עם הערכה בדידה. הוכח שהלמה של קנטור נכונה: בהינתן שרשרת $B_1\supset B_2\supset B_3\cdots$ של כדורים סגורים מקוננים ב־ K, אזי $\bigcap_{n=1}^\infty B_n\neq\varnothing$.

6. הוכח כי $\mathbb{C}_p$ סגור אלגברית. רמז: למה של קרסנר.

7. הוכח כי $\mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ מכיל שורש של $x^{p-1}+p$.