תרגיל בית 9 - אנליזה מודרנית

1. נניח ו μ הינה מידה סופית . הוכיחו כי פונקציה מדידה ואי שלילית הינה אינטגרבילית אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left\{x: f(x)\geq n\right\}\right)<\infty$.

פתרון:

$\Leftarrow$: אם f אינטגרבילית. נרשום

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left\{x: f(x)\geq n\right\}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int 1_{\left(\left\{x: f(x)\geq n\right\}\right)}d\mu=\int\sum_{n=1}^{\infty}1_{\left\{x: f(x)\geq n\right\}}d\mu$$
$$=\int\sum_{n=1}^{\infty}n_{\left\{x: n+1>f(x)\geq n\right\}}d\mu$$
.

הפונקציה $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n_{\left\{x: n+1>f(x)\geq n\right\}}$ הינה למעשה $\lfloor f(x)\rfloor$ פונקצית פלור, השלם הגדול ביותר מכל השלמים שקטנים מהערך $f(x)$. כך שלמעשה הפונקציה $g(x)$ נשלטת ע"י הפונקציה $f(x)$ ולכן אינטגרבילית.

$\Rightarrow$: אם הטור מתכנס. אזי נוסיף את פונקצית האינדיקטור ונקבל כי $f(x)\leq g(x)+1$. כמו כן , $g(x)+1$ אינטגרבילית כי המידה הינה סופית ולכן גם f אינטגרבילית.

2. מצאו פונקציה $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה ולא אינטגרבילית לבג אך כך שהאינטגרל רימן הלא אמיתי שלה קיים.

כלומר, אנו רוצים ש $\int_0^1|f|dm=\infty$ אבל ש $\lim_{a\to 0^+}R\left(f1_{(a,1]}\right)$ קיים.

פתרון: נסתכל על הפונקציה $f=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ בקטע $(0,1]$.

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^1\frac{\sin{}^1\!/\!_x}{x}dx\overset{y={}^1\!/\!_x}{=}\lim_{a\to 0^+}\int_1^{{}^1\!/\!_a}\frac{\sin y}{y}dy=\lim_{a\to 0^+}\left(-\frac{\cos}{y}\Big|_1^{{}^1\!/\!_a}-\int_1^{{}^1\!/\!_a}\frac{\cos y}{y^2}dy\right)$$

אבל ברור כי $\lim_{a\to 0^+}-\frac{\cos(y)}{y}\Big|_1^{{}^1\!/\!_a}<\infty$ וגם כי $\lim_{a\to 0^+}\int_1^{{}^1\!/\!_a}\frac{\cos y}{y^2}dy\leq\lim_{a\to 0^+}\int_1^{{}^1\!/\!_a}\frac{1}{y^2}dy=\int_1^{\infty}\frac{1}{y^2}dy<\infty$ ולכן האינטגרל קיים.

לעומת זאת, לכל $a>0$ הפונקציה f רציפה בקטע $(a,1)$ ולכן נובע כי היא אינטגרבילית רימן ולבג . עפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית והעובדה שכאשר אינטגרל רימן קיים אזי הוא שווה לאינטגרל לבג נובע כי

$$\int_0^1 \left|\frac{\sin 1/x}{x}\right|dx=\lim_{a\to0^+}\int_a^1\left|\frac{\sin 1/x}{x}\right|dx=\lim_{a\to0^+}\int_0^1\left|\frac{\sin 1/x}{x}1_{(a,1]}(x)\right|dx \overset{y=1/x}{=} \lim_{a\to0^+}\int_0^\infty\left|\frac{\sin y}{y}1_{(1,\frac{1}{a}]}(y)\right|dy$$

$$=\lim_{c\to\infty}\int_0^\infty\left|\frac{\sin y}{y}1_{(1,c]}(y)\right|dy$$

מכיוון שהגבול קיים לכל סדרה שמתכנסת לאינסוף נובע כי

$$\int_1^{\pi(2M+1)}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy=\int_1^{\pi}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy+\int_{\pi}^{\pi(2M+1)}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy=\int_1^{\pi}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy+\sum_{k=1}^{M}\int_{-\pi+2\pi k}^{\pi+2\pi k}\left|\frac{\sin y}{y}\right|dy$$

$$\le\int_1^{\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dy+\sum_{k=1}^{M}\int_{-\pi+2\pi k}^{\pi+2\pi k}\left|\sin y\right|\frac{1}{\pi+2\pi k}dy$$

$$\overset{r=y-2\pi k}{=}\int_1^{\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx+\sum_{k=1}^{M}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin(r+2\pi k)\right|\frac{1}{\pi+2\pi k}dr$$

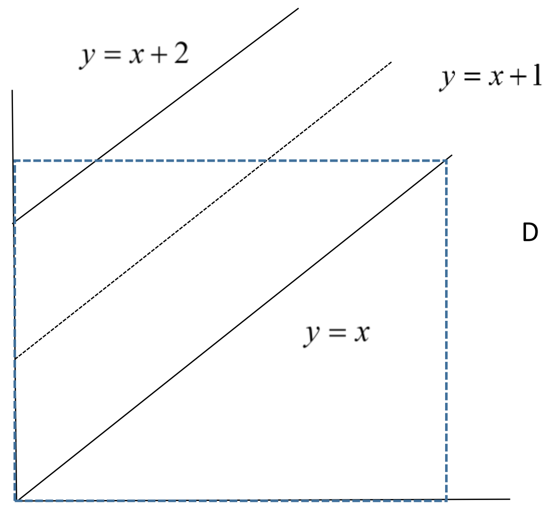
$$=\int_1^{\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx+\sum_{k=1}^{M}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin(r)\right|\frac{1}{\pi+2\pi k}dr=\int_1^{\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx+\sum_{k=1}^{M}\frac{4}{\pi+2\pi k}$$

נשאיף את M לאינסוף ונקבל כי הטור מתבדר ולכן $\int_0^1|f|dm=\infty$.

3. יהי $X=Y=\mathbb{R}$ ונסתכל על $\mathbb{R}^2$ ביחס לסיגמא אלגברה בורל. נגדיר את הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & x\ge0 \text{ and } x\le y<x+1\\ -1 & x\ge0 \text{ and } x+1\le y<x+2\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

הראו כי $\int\int f(x,y)m(dx)m(dy)\ne\int\int f(x,y)m(dy)m(dx)$. מדוע אין זו סתירה למשפט פוביני?



נחשב

$$h(y)=\int f(x,y)m(dx)=\begin{cases} 0 & y<0 \\ \int_0^y 1dm = y & 0\le y<1 \\ \int_0^{y-1} -1dm+\int_{y-1}^{y} 1dm = 2-y & 1\le y<2 \\ \int_{y-2}^{y-1} -1dm+\int_{y-1}^{y} 1dm = 0 & 2\le y<\infty \end{cases}$$

ולכן

$$\int\int f(x,y)m(dx)m(dy)=\int_{-\infty}^{\infty} h(y)dm=\int_0^1 ym(dy)+\int_1^2 (2-y)m(dy)=1$$

מצד שני,

$$g(x)=\int f(x,y)m(dy)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \int_x^{x+1} 1m(dy)+\int_{x+1}^{x+2} -1m(dy)=0 & x\ge 0 \end{cases}$$

ולכן

$$\int\int f(x,y)m(dy)m(dx)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dm=\int_{-\infty}^{\infty} 0dm=0$$

ומכאן ש

$$0=\int\int f(x,y)m(dy)m(dx)\neq\int\int f(x,y)m(dx)m(dy)=1.$$

על מנת להראות כי אין סתירה למשפט פוביני, נראה כי $\int_{\mathbb{R}^2}|f(x,y)|dm\times dm=\infty$. נחשב את $\int_D|f(x,y)|dm\times dm$ כאשר D_x הינו הריבוע בציור שצלעו באורך x . ברור כי אינטגרל כפול על הפונקציה הינו השטח של הריבוע D_x פחות שני המשולשים. כלומר, אם גודל הריבוע הוא x^2 אזי $\int_{D_x}|f(x,y)|dm\times dm=x^2-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{(x-2)^2}{2}\right)=2x-2$. עפ"י משפט ההתכנסות המונוטונית נובע כי $\int_{\mathbb{R}^2}|f(x,y)|dm\times dm=\lim_{x\to\infty}\int_{D_x}|f(x,y)|dm\times dm=\lim_{x\to\infty}2x-2=\infty$. מכאן כי תנאי משפט פוביני אינם מתקיימים ולכן אין סתירה.

4. תהי A תת קבוצה של $[0,1]^2$ מדידה לבג (ביחס לסיגמא אלגברה המכפלה) עם מידה $m_2(A)=1$ כאשר $m_2=m\times m$ ו m הינה מידת לבג. הראו כי כמעט לכל $x\in[0,1]$ הקבוצה $s_x(A)=\{y:(x,y)\in A\}$ הינה בעלת מידה $m(s_x(A))=1$.

פתרון: ברור כי הפונקציה 1_A הינה מדידה לבג ביחס לסיגמא אלגברה המכפלה של $[0,1]^2$. כמו כן נובע כי

$$\int_{[0,1]^2}1_A(x,y)dm_2(x,y)=m_2(A)=1<\infty$$

עפ"י משפט טונלי נקבל כי

$$\int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]}1_{s_x(A)}(x,y)m(dy)\right)m(dx)=\int_{[0,1]}m(s_x(A))m(dx)=1$$

נובע כי

$$\int_{[0,1]}\left(1-m(s_x(A))\right)m(dx)=0$$

מכיוון ש $s_x(A)\subseteq[0,1]$ נובע כי $m(s_x(A))\leq1$ ולכן $1-m(s_x(A))\geq0$ לכל $x\in[0,1]$. ראינו כבר כי אם $f\geq0$ כב"מ וגם $\int fd\mu=0$ אזי נובע כי $f=0$ כב"מ. מכאן ש $1-m(s_x(A))=0$ כב"מ ולכן $m(s_x(A))=1$ כב"מ.