אינפי 4 – תרגול 1

מכפלה וקטורית:

הגדרה: יהיו $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ ו $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ שני וקטרים במרחב אז המכפלה הווקטורית $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ היא הוקטור המוגדר ע"י :

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}u_2 & u_3\\ v_2 & v_3\end{vmatrix}i-\begin{vmatrix}u_1 & u_3\\ v_1 & v_3\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix}u_1 & u_2\\ v_1 & v_2\end{vmatrix}k$$

ניתן לזכור זאת בקלות ע"י

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

דוגמא: חשב את $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ עבור $\mathbf{u}=(1,2,-2)$ ו $\mathbf{v}=(3,0,1)$.

פתרון:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}i-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}k=2i-7j-6k$$

שימו לב כי לא ניתן להגדיר מכפלה סקלרית על וקטורים מימד שונה מ 3. לעומת זאת ניתן להגדיר מכפלה סקלרית לכל וקטור מכל מימד. להלן הקשר שבין מכפלה סקלרית ומכפלה וקטורית:

משפט: אם $\mathbf{u}$ ו $\mathbf{v}$ הם וקטורים במרחב, אז -

א. $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0$

ב. $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0$

ג. $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$ (זהות של לגרנז')

ד. $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=0$ אמ"מ $\mathbf{u}$ ו $\mathbf{v}$ הינם וקטורים מקבילים.

<u>הצגה פרמטרית של ישר</u>

א. במרחב דו ממדי : ההצגה הפרמטרית של ישר, העובר דרך הנקודה (x_0,y_0) ומקביל לוקטור השונה מאפס $\mathbf{v}=ai+bj$ היא:

$$x=x_0+at \quad y=y_0+bt \qquad -\infty<t<\infty$$

ב. במרחב תלת ממדי : ההצגה הפרמטרית של של ישר העובר דרך הנקודה $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ ומקביל לוקטור שהונה מאפס $\mathbf{v} = ai + bj + ck$ היא:

$$x = x_0 + at \quad y = y_0 + bt \quad z = z_0 + ct \qquad -\infty < t < \infty$$

דוגמא: מצא את ההצגה הפרמטרית של הישר

א. העובר דרך $\left(4, 2\right)$ ומקביל ל $\mathbf{v} = \left(-1, 5\right)$.

ב. העובר דרך $\left(1, 2, -3\right)$ ומקביל ל $\mathbf{v} = 4i + 5j - 7k$.

ג. העובר דרך הראשית במרחב תלת ממדי ומקביל ל $\mathbf{v} = \left(1,1,1\right)$.

פתרון:

א. נציב $x_0 = 4, y_0 = 2, a = -1, b = 5$, אנו מקבלים:

$$x = 4 - t \quad y = 2 + 5t$$

ב. באותו אופן :

$$x = 1 + 4t \quad y = 2 + 5t \quad z = -3 - 7t$$

ג. באותו האופן:

$$x = t \quad y = t \quad z = t$$

<u>הצגה של מישור לפי נקודה ונורמל:</u>

ניתן לאפיין חד-משמעית מישור במרחב תלת-ממדי על ידי שני נתונים : נקודה על המישור ווקטור ניצב למישור(נורמל למישור).

נניח ואנו רוצים למצוא משוואה של המישור העובר דרך הנקודה $P_0 = \left(x_0, y_0, z_0\right)$ וניצב לוקטור השונה מאפס $n = \left(a, b, c\right)$. ברור כי המישור הינו קבוצת כל הנקודות P כך ש $\overrightarrow{P_0P}$ ניצב לווקטור הנורמל. כלומר:

$$a\left(x - x_0\right) + b\left(y - y_0\right) + c\left(z - z_0\right) = 0$$

למשוואה זו נקרא ההצגה של המישור לפי נקודה ונורמל.

דוגמא: מצא משוואה של המישור העובר דרך הנקודה $\left(3, -1, 7\right)$ וניצב לוקטור $\mathbf{n} = \left(4, 2, -5\right)$.

פתרון: לפי מה שראינו ההצגה של המישור לפי נקודה ונורמל היא :

$$4\left(x - 3\right) + 2\left(y + 1\right) - 5\left(z - 7\right) = 0$$

הערה: ברור כעת כי כל מישור ב $\mathbb{R}^3$ ניתן לייצג בצורה הבאה:

$$ax+by+cz+d=0$$

משפט: המרחק D בין הנקודה (x_0, y_0, z_0) למישור $ax+by+cz+d=0$ הוא –

$$D=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

דוגמא: המישורים $x+2y-2z=3$ ו $2x+4y-4z=7$ מקבילים, שכן הניצבים שלהם $(1,2,-2)$ ו $(2,4,-4)$, הם וקטורים מקבילים. מצא את המרחק בין מישורים אלו.

פתרון: לחישוב המרחק D בין המישורים, נבחר נקודה כלשהי על אחד המישורים ונחשב את מרחקה מן המישור האחר. אם במשוואת המישור $x+2y-2z=3$ נציב למשל $x=z=0$, נקבל את הנקודה $(3,0,0)$ הנמצאת במישור זה . לפי הנוסחא, המרחק של $(3,0,0)$ מן המישור $2x+4y-4z=7$ הוא-

$$D=\frac{|(2)(3)+4(0)+(-4)(0)-7|}{\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}}=\frac{1}{6}$$

<u>מעבר בין קואורדינטות</u>

המרה	נוסחאות
$(x,y,z)\leftarrow(r,\theta,\mathrm{z})$	$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$
$(r,\theta,\mathrm{z})\leftarrow(x,y,z)$	$r=\sqrt{x^2+y^2}, \tan\theta=\frac{x}{y}, z=z$
$(r,\theta,z)\leftarrow(\rho,\theta,\varphi)$	$r=\rho\sin\varphi, \theta=\theta, z=\rho\cos\varphi$
$(\rho,\theta,\varphi)\leftarrow(r,\theta,z)$	$\rho=\sqrt{r^2+\mathrm{z}^2}, \theta=\theta, \tan\varphi=\frac{r}{\mathrm{z}}$
$(x,y,\mathrm{z})\leftarrow(\rho,\theta,\varphi)$	$x=\rho\sin\varphi\cos\theta, y=\rho\sin\varphi\sin\theta, z=\rho\cos\varphi$
$(\rho,\theta,\varphi)\leftarrow(x,y,\mathrm{z})$	$\rho=\sqrt{x^2+y^2+\mathrm{z}^2}, \tan\theta=\frac{y}{x}, \cos\varphi=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$