אלגברה לינארית 2 תרגול 2

8 באפריל 2021

1 המשך דטרמיננטות

1.1 דטרמיננטה לפי שורה ועמודה

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אז:

- פיתוח לפי שורה i:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} |M_{ij}|$$

- פיתוח לפי עמודה j:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} |M_{ij}|$$

כאשר M_{ij}נקרא המינור ה־ij של A, והוא מתקבל מ־A ע"י מחיקת השורה ה־i והעמודה ה־j.

דוגמאות:

1. חשבו את

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

נפתח לפי שורה שנייה:

$$|A| = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{2+j} A_{2j} |M_{2j}| =$$

$$= (-1)^3 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^5 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 - 8 + 2 = -4$$

2. חשבו את

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

פתרון: נפתח לפי עמודה שלישית, ובגלל שני האפסים נקבל:

$$|A| = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+3} A_{i3} |M_{i3}| = 0 + (-1)^5 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 16 & 3 \end{vmatrix} + 0 = 222$$

תרגילים נוספים:

1. תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ הפיכה המקיימת:

$$\forall i, j : A_{ij} \in \mathbb{Z} \wedge A^{-1}_{ij} \in \mathbb{Z}$$

הוכיחו: $|A^{16}| = 1$.

פתרון: שלב ראשון: נראה ש- $|A|, |A^{-1}| \in \mathbb{Z}$: נשים לב, נניח בעזרת פיתוח לפי תמורות, שהדטרמיננטה מתקבלת כסכום של כפל של רכיבי המטריצה (עד כדי סימן), ולכן היא סכום של כפל של מספרים שלמים, ולכן היא מספר שלם.

שלב שני: נראה ש- $|A|, |A^{-1}| = \pm 1$:

$$1 = |I| = |AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}|$$

קיבלנו (בעזרת שלב ראשון) כפל של מספרים שלמים שנותן 1, ולכן נקבל

$$|A| = |A^{-1}| = \pm 1$$

לבסוף:

$$|A^{16}| = |A|^{16} = (\pm 1)^{16} = 1$$

2. הוכיחו או הפריכו:

(א) תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. אזי $|AB|=|BA|$.

(ב) תהיינה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}, B\in\mathbb{R}^{n\times m}$. אז $|AB|=|BA|$.

(ג) יהי n אי־זוגי, ותהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש־ $AB+BA=0$. אזי: A לא הפיכה או B לא הפיכה.

פתרון: א. הוכחה:

$$|AB|=|A|\cdot|B|\underset{*}{=}|B|\cdot|A|=|BA|$$

כאשר מעבר $*$ נובע מחילופיות בשדה.

ב. הפרכה: ניקח

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},B=A^t$$

ואז

$$|AB|=\det\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=1$$

$$|BA|=\det\begin{pmatrix}&&\\&&\\0&0&0\end{pmatrix}=0$$

הרחבה: שימו לב שאם $m<n$ אז $rank(A),rank(B)\leq m$, כעת מכיוון ש־ $rank(BA)\leq rank(A),rank(B)\leq m<n$, ומכיוון ש־ $BA\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נקבל שהיא בהכרח לא הפיכה כי דרגתה קטנה מ־n, ולכן $|BA|=0$.

ג. מהשיוויון $AB+BA=0$ נקבל $AB=-BA$. ולפי סעיף א:

$$|BA|=|AB|=|-BA|=(-1)^n|BA|\underset{n=2k+1}{=}-|BA|$$

ולכן:

$$2|BA|=0\Rightarrow|BA|=0$$

ולכן BA לא הפיכה (כי דטרמיננטה שלה 0), ולכן אחת מהן (לפחות) לא הפיכה.

3. הוכיחו או הפריכו:

(א) A הפיכה אמ"ם $A+A^t$ הפיכה.

פתרון: הפרכה: ניקח

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

כמובן ש־A הפיכה, ואילו:

$$A+A^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=0$$

ולכן $A+A^t$ לא הפיכה.

הערה: אפשר גם הפוך:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A+A^t=I$$

(ב) אם A סימטרית אז A הפיכה אמ"ם $A+A^t$ הפיכה.

פתרון: נניח A סימטרית ולכן:

$$A \text{ invertible}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$|A|\neq 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$|A+A^t|=|A+A|=|2A|=2^n|A|\neq 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$A+A^t \text{ invertible}$$

4. הוכיחו או הפריכו: $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה אמ"ם A^3+I הפיכה.

פתרון: הפרכה: $A=-I$ ואז:

$$A^3+I=-I+I=0$$

אפשר גם לקחת $A=0$ ואז $A^3+I=I$.

5. הוכיחו: A הפיכה אמ"ם AA^t הפיכה.

פתרון:

$$A \text{ invertible}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$|A| \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$|AA^t| = |A||A^t| = |A|^2 \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$AA^t \text{ invertible}$$