27.7.2021

בסיס וחברים

1. תרגיל: במרחב $V=\mathbb{R}^4$, מצאו בסיס ל W_1,W_2 ולסכום ולחיתוך שלהם כאשר

$$W_1=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ו

$$W_2=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{array}{c}a_1-3a_2-5a_3=a_4\\4a_2+8a_3-2a_4=2a_1\end{array}\right\}$$

פתרון: דבר ראשון נעביר את W_1 להצגה ע"י משוואות (כלומר להציג את W_1 כאוסף הפתרונות למערכת משוואות הומגנית) ונעביר את W_2 להצגת span.

- הערה (מקווה שראיתם) באופן כללי: שני וקטורים v_1,v_2 בת"ל אמ"מ אחד לא כפולה של האחר (נובע ישירות מהמשפט שקבוצת וקטורים ת"ל אמ"מ אחד הוא צ"ל של האחרים). ולכן הוקטורים

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

בת"ל. לפי הגדרה $\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ פורשת את W_1 (כי $W_1=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$) ולכן $\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל W_1 והמימד שלו 2 ($\dim W_1=2$).

- נבדוק (כמו בתירגול קודם) מתי $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ונעשה זאת ע"י דירוג של המטריצה המתאימה

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & a_1 \\ -1 & 1 & a_2 \\ 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & a_4 \end{array} \right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{a_1}{2} \\ 0 & 1 & a_2 + \frac{a_1}{2} \\ 0 & 0 & a_3 - \frac{a_1}{2} \\ 0 & 0 & a_4 - a_2 - \frac{a_1}{2} \end{array} \right)$$

ובדיקה מתי אין שורת סתירה. זה קורה אמ"מ $a_3 - \frac{a_1}{2} = 0$ וגם $a_4 - a_2 - \frac{a_1}{2} = 0$ ולכן

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{c} a_3 - \frac{a_1}{2} = 0 \\ a_4 - a_2 - \frac{a_1}{2} = 0 \end{array} \right\}$$

כעת נשתמש בהצגה זאת למציאת בסיס לחיתוך $W_1 \cap W_2$.

- החיתוך $W_1 \cap W_2$: ישירות מהגדרת חיתוך

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{c} a_3 - \frac{a_1}{2} = 0 \\ a_4 - a_2 - \frac{a_1}{2} = 0 \\ a_1 - 3a_2 - 5a_3 = a_4 \\ 4a_2 + 8a_3 - 2a_4 = 2a_1 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{c} a_3 - \frac{a_1}{2} = 0 \\ a_4 - a_2 - \frac{a_1}{2} = 0 \\ a_1 - 3a_2 - 5a_3 - a_4 = 0 \\ -2a_1 + 4a_2 + 8a_3 - 2a_4 = 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

נדרג את המערכת ונפתור אותה וכך נמצא בסיס:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן המשתנה השלישי חופשי (נסמנו ב t) ואז

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ונקבל ש $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס לחיתוך ($\dim W_1 \cap W_2 = 1$).

- נציג את W_2 ע"י span: נפתור את המשוואות שמאפיינות את

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{c} a_1 - 3a_2 - 5a_3 = a_4 \\ 4a_2 + 8a_3 - 2a_4 = 2a_1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{c} a_1 - 3a_2 - 5a_3 - a_4 = 0 \\ -2a_1 + 4a_2 + 8a_3 - 2a_4 = 0 \end{array} \right\}$$

(ע"י דירוג):

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ולכן יש משתנים חופשיים $a_3 = t, a_4 = s$ ואז

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2t - 5s \\ -t - 2s \\ t \\ s \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ו $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל W_2 (ו $\dim W_2 = 2$).

- סכום $W_1 + W_2$: נתבסס על הטענה (מש.ב.) ש

$$\text{span} S_1 + \text{span} S_2 = \text{span}\left(S_1 \cup S_2\right)$$

ואצלנו

$$W_1+W_2=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}+\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

כעת ניקח את הקבוצה הפורשת

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ונגזור ממנה בסיס. איך? דירוג!

$$A=\begin{pmatrix}2&0&2&-5\\-1&1&-1&-2\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}2&0&2&-5\\0&1&0&-4.5\\0&0&0&2.5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

קיבלנו שיש משתנה חופשי (המשתנה השלישי) ולכן יש פתרון לא טריוואלי למערכת $Ax=0$ ופתרון זה יתן צירוף לינארי לא טרייואלי שמתאפס של

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

ולכן הם ת"ל. תראו בהרצאה (או שראיתם) שמדרגים (כמו שעשינו) ולוקחים את הוקטורים שמתאימים למשתנים תלויים (כלומר "זורקים" את הוקטורים שמתאימים למשתנים חופשיים). אצלנו: ניקח את

$$\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

והם יהיו בסיס (למרחב שאנחנו עובדים איתו W_1+W_2).

2. תרגיל: במרחב $V=\mathbb{R}_3[x]$, מצאו בסיס ל W_1,W_2 ולסכום ולחיתוך שלהם כאשר

$$W_1=\text{span}\left\{2-x+x^2,x+x^3\right\}$$

ו

$$W_2=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \mid \begin{array}{c} a_0-3a_1-5a_2=a_3 \\ 4a_1+8a_2-2a_3=2a_0 \end{array}\right\}$$

פתרון: זה בדיוק כמו התרגיל הקודם עם התאמה לפולינומים. ואז למשל $\left\{2-x+x^2\right\}$ בסיס לחיתוך ($\dim W_1\cap W_2=1$).

3. יהא V מ"ו $\dim V=n$. יהא W_1 ת"מ $\dim W_1=n-1$. הוכיחו: כל ת"מ W_2 של V שאינו מוכל ב W_1 מקיים כי $W_1+W_2=V$

פתרון: יהא W_2 ת"מ המקיים $W_1\not\supseteq W_2$. כיוון ש $\dim W_1\cap W_2\leq \dim W_2$ (למה? $W_1\cap W_2$ ת"מ של W_2). נב"ש $\dim W_1\cap W_2=\dim W_2$ ונקבל ש

$$W_1\cap W_2=W_2$$

כי יש הכלה ושיוויון מימדים (כלומר $W_1\cap W_2\subseteq W_2$ ויש להם אותו מימד) . ואז

$$W_1\supseteq W_1\cap W_2=W_2$$

וקיבלנו סתירה לכך $W_1\not\supseteq W_2$. לכן $\dim W_1\cap W_2<\dim W_2$ ולכן $0<\dim W_2-\dim W_1\cap W_2$ כלומר $1\leq \dim W_2-\dim W_1\cap W_2$ ואז לפי משפט המימדים

$$\begin{aligned}\dim\left(W_1+W_2\right)&=\dim W_1+\dim W_2-\dim\left(W_1\cap W_2\right)\\&\geq(n-1)+1\\&=n\end{aligned}$$

ולכן $\dim\left(W_1+W_2\right)=n$ (כי $\dim\left(W_1+W_2\right)\leq \dim V=n$) ושוב: $W_1+W_2\subseteq V$ מאותו מימד ולכן הם שווים $W_1+W_2=V$ כמו שרצינו.

4. יהא V מ"ו $\dim V=n$. יהא W_1 ת"מ $\dim W_1=n-2$. הפריכו:כל ת"מ W_2 של V שאינו מוכל ב W_1 מקיים כי $W_1+W_2=V$

הפרכה: עבור $n=2$, נסתכל ב $V=\mathbb{R}^2$ וניקח $W_1=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ שהוא מימד $0=n-2$ (למשל בסיס ל W_1 הוא $\emptyset$) ו $W_2=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ לא מוכל ב W_1אבל

$$W_1+W_2=W_2\neq\mathbb{R}^2$$

כנדרש.

5. יהא V מ"ו מימד 5. ויהיו W_1,W_2 תתי מרחבים עם מימד $\dim W_1=3,\dim W_2=4$. מה האפשרויות ל $\dim W_1\cap W_2$ (מצאו

בזמנכם החופשי דוגמה קונקרטית לכל אחת מהאפשרויות).

פתרון: כיוון ש W_1+W_2 ת"מ של V אזי $\dim W_1+W_2\le 5$ ולכן, ממשפט המימדים

$$\begin{aligned}\dim W_1\cap W_2&=\dim W_1+\dim W_2-\dim\left(W_1+W_2\right)\\&\ge 3+4-5\\&=2\end{aligned}$$

ולכן $\dim W_1\cap W_2\ge 2$. בנוסף $W_1\cap W_2\subseteq W_1$ ולכן $\dim W_1\cap W_2\le 3$. לסיכום $2\le\dim W_1\cap W_2\le 3$ (וכל אחת מהאפשרויות האלה אפשרית - מצאו דוגמה).

6. יהא V מ"ו ויהיו W_1,W_2,W_3 ת"מ. הוכיחו/הפריכו: $W_1\cap\left(W_2+W_3\right)\ne\left(W_1\cap W_2\right)+\left(W_2\cap W_3\right)$
פתרון: הפרכה: $V=W_1=W_2=W_3$ ואז מתקיים ש $W_1\cap\left(W_2+W_3\right)=\left(W_1\cap W_2\right)+\left(W_2\cap W_3\right)$ ושניהם שווים ל V בעצמו

7. יהא V מ"ו ויהיו W_1,W_2,W_3 ת"מ. הוכיחו/הפריכו: $W_1\cap\left(W_2+W_3\right)=\left(W_1\cap W_2\right)+\left(W_2\cap W_3\right)$
פתרון: הפרכה: $V=\mathbb{R}^2$ ו

$$\begin{aligned}W_1&=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}\\W_2&=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\\W_3&=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}\end{aligned}$$

נחשב

$$W_1\cap\left(W_2+W_3\right)=W_1\cap\left(\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}\right)=W_1\cap\mathbb{R}^2=W_1$$

מצד שני

$$\left(W_1\cap W_2\right)+\left(W_2\cap W_3\right)=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}+\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

8. הוכיחו: לכל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{5\times5}$ מתקיים שקבוצת המטריצות $\left\{I,A,A^2,\ldots,A^{25}\right\}$ ת"ל במרחב $V=\mathbb{F}^{5\times5}$.
הוכחה: המימד של V הוא $\dim V=25$ ובקבוצה שלנו יש 26 איברים ולכן הם בהכרח ת"ל.

(א) האם קיימת מטריצה $A\in\mathbb{F}^{5\times5}$ כך ש $I,A,\ldots,A^{24}$ בת"ל? לא! אתם תראו זאת בלינארית 2.

9. יהא V מ"ו. ויהיו W_1,W_2 ת"מ המקיימים כי

$$\dim\left(W_1+W_2\right)=\dim\left(W_1\cap W_2\right)+1$$

הוכיחו: אחד מהם מוכל בשני.

פתרון: מכיוון ש

$$W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \subseteq W_1 + W_2$$

ולכן מתקיים

$$\dim\left(W_1 \cap W_2\right) \leq \dim W_1 \leq \dim\left(W_1 + W_2\right) = \dim\left(W_1 \cap W_2\right) + 1$$

ולכן $\dim W_1 = \dim\left(W_1 \cap W_2\right)$ או $\dim W_1 = \dim\left(W_1 \cap W_2\right) + 1$.

אם $\dim W_1 = \dim\left(W_1 \cap W_2\right)$ אז $W_1 = W_1 \cap W_2$ (הכלה ושיוויון מימדים) ואז $W_1 = W_1 \cap W_2 \subseteq W_2$ וסיימנו

אחרת $\dim\left(W_1 + W_2\right) = \dim W_1 = \dim\left(W_1 \cap W_2\right) + 1$ ואז $W_1 = W_1 + W_2$ (הכלה ושיוויון מימדים) ואז

$$W_1 = W_1 + W_2 \supseteq W_2$$

וסיימנו.