לינארית 2 - מטלה 1 - דטרמיננטה

תאריך הגשה: $6.4.2017 - 2$ כל אחד בקבוצת תרגול שלו.

הנחיות:
בראש הדף הראשון ציינו את הפרטים הבאים:

1. מספר תרגיל
2. שם מלא
3. ת.ז
4. מספר קבוצת תרגול שאליה אתם מגיעים.

תרגיל 1. חילוק פולינומים

.1

$$\frac{x^4+4x^3+6x^2+4x+1}{x^2+2x+1}$$

פתרון.
נבצע חילוק פולינומים.
שלב ראשון

$$\begin{array}{l l}
\underline{x^2} & \\
x^4+4x^3+6x^2+4x+1| & x^2+2x+1 \\
\underline{x^4+2x^3+x^2} & \\
\quad 2x^3+5x^2+4x+1 &
\end{array}$$

שלב שני

$$\begin{array}{l l}
\underline{x^2+2x} & \\
x^4+4x^3+6x^2+4x+1| & x^2+2x+1 \\
\underline{x^4+2x^3+x^2} & \\
\quad 2x^3+5x^2+4x+1 & \\
\quad \underline{2x^3+4x^2+2x} & \\
\qquad x^2+2x+1 &
\end{array}$$

שלב שלישי

$$\begin{array}{l l}
\underline{x^2+2x+1} & \\
x^4+4x^3+6x^2+4x+1| & x^2+2x+1 \\
\underline{x^4+2x^3+x^2} & \\
\quad 2x^3+5x^2+4x+1 & \\
\quad \underline{2x^3+4x^2+2x} & \\
\qquad x^2+2x+1 & \\
\qquad \underline{x^2+2x+1} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

ואכן

$$x^4+4x^3+6x^2+4x+1=\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2+2x+1\right)=(x+1)^2$$

.2

$$\frac{x^3-1}{x+2}$$

פתרון.
נבצע חילוק פולינומים.
שלב ראשון

$$\begin{array}{rl} \overline{x^2} & \\ x^3-1| & \quad x+2 \\ \underline{x^3+2x^2} & \\ -2x^2-1 & \end{array}$$

שלב שני

$$\begin{array}{rl} \overline{x^2-2x} & \\ x^3-1| & \quad x+2 \\ \underline{x^3+2x^2} & \\ -2x^2-1 & \\ \underline{-2x^2-4x} & \\ 4x-1 & \end{array}$$

שלב שלישי

$$\begin{array}{rl} \overline{x^2-2x+4} & \\ x^3-1| & \quad x+2 \\ \underline{x^3+2x^2} & \\ -2x^2-1 & \\ \underline{-2x^2-4x} & \\ 4x-1 & \\ \underline{4x+8} & \\ -9 & \end{array}$$

לכן

$$\frac{x^3-1}{x+2}=x^2-2x+4+\frac{-9}{x^3-1}$$

תרגיל 2. מצא את הע"ע והע"ו של המטריצות הבאות

.1 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

פתרון.
ראשית נמצא λ כך שהפולינום האופייני מתאפס.

$$0=\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)$$

משמע $\lambda=1,2$ הם ע"ע של המטריצה. כעת נמצא את הווקטור העצמי עבור כל אחד מהערכים.

- $\lambda=1$: צריך למצוא וקטור v השייך למרחב ה-0 של

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

מכאן הווקטור העצמי של $\lambda=1$ הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $\lambda = 2$: צריך למצוא ווקטור v השייך למרחב ה-0 של

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן הווקטור העצמי של $\lambda = 2$ הוא $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

פתרון.
ראשית נמצא λ כך שהפולינום האופייני מתאפס.

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 4 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4) - 4$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda^2 - 5\lambda = 0$$

משמע $\lambda = 0, 5$ הם ע"ע של המטריצה. כעת נמצא את הווקטור העצמי עבור כל אחד מהערכים.

- $\lambda = 0$: צריך למצוא ווקטור v השייך למרחב ה-0 של

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

נבצע את פעולת השורה $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

מכאן הווקטור העצמי של $\lambda = 0$ הוא $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $\lambda = 5$: צריך למצוא ווקטור v השייך למרחב ה-0 של

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

נבצע את פעולת השורה $R_2 \leftarrow R_2 + \frac{1}{4}R_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

מכאן הווקטור העצמי של $\lambda = 5$ הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

פתרון.
ראשית נמצא λ כך שהפולינום האופייני מתאפס.

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -4 \\ 0 & \lambda - 2 & -6 \\ 0 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)((\lambda - 2)(\lambda - 3) - 6)$$
$$\Downarrow$$
$$(\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 5\lambda\right) = 0$$

משמע $\lambda = 1, 0, 5$ הם ע"ע של המטריצה. כעת נמצא את הווקטור העצמי עבור כל אחד מהערכים.

• $\lambda = 0$: צריך למצוא ווקטור v השייך למרחב ה-0 של

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

נבצע את פעולת השורה $R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{2}R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

מכאן הווקטור העצמי של $\lambda = 0$ הוא $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• $\lambda = 1$: צריך למצוא ווקטור v השייך למרחב ה-0 של

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

נבצע את פעולת השורה $R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{2}R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

מכאן הווקטור העצמי של $\lambda = 1$ הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• $\lambda = 5$: צריך למצוא ווקטור v השייך למרחב ה-0 של

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

נבצע את פעולת השורה $R_3 \leftarrow R_3 + \frac{1}{3}R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

מכאן הווקטור העצמי של $\lambda = 5$ הוא $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

תרגיל 3. מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ נקראת בלוק ג׳ורדן (אין זה מתייחס לחסימה של מייקל ג׳ורדן)

מסדר n עם סקלר αמצא את הע"ע והווקטורים העצמים של בלוק ג'ורדן מסדר 4, משמע המטריצה $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$

פתרון.
ראשית נמצא λ כך שהפולינום האופייני מתאפס.

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-\alpha & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-\alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-\alpha & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-\alpha \end{vmatrix} = (\lambda-\alpha)^4$$

משמע $\lambda = \alpha$ הוא ע"ע היחיד של המטריצה. כעת נמצא את הווקטור העצמי עבורו

- $\lambda = \alpha$: צריך למצוא ווקטור v השייך למרחב ה-0 של

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מכאן הווקטור העצמי של $\lambda = \alpha$ הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

תרגיל 4. יהיה v וקטור עצמי של המטריצה A ששייך לערך העצמי λ.

1. הראה שהווקטור x הוא גם ווקטור עצמי של המטריצה A^k ($k \in \mathbb{N}$) ששייך לערך עצמי λ^k.

פתרון.
נוכיח בעזרת אינדוקציה שמתקיים
$$A^k x = \lambda^k x$$
עבור $k = 1$
$$Ax = \lambda x$$
זה מתקיים כי נתון ש-x הוא ו"ע של A עבור ע"ע λ.
נניח את נכונות הטענה עבור $k-1$.
נוכיח עבור k:
$$A^k x = \lambda^k x$$
נתחיל מאגף שמאל
$$A^k x = A^{k-1}(Ax) = A^{k-1}(\lambda x) = \lambda\left(A^{k-1}x\right) = \lambda\left(\lambda^{k-1}x\right) = \lambda^k x$$

2. הראה שהווקטור x הוא גם ווקטור עצמי של המטריצה $A^3 - 2A + I$ ששייך לערך עצמי $\lambda^3 - 2\lambda + 1$.

פתרון.
צריך להראות ש-
$$\left(A^3 - 2A + I\right)x = \left(\lambda^3 - 2\lambda + 1\right)x$$
בעזרת חוק הפילוג זה שקול ל-
$$A^3 x - 2Ax + x = \lambda^3 x - 2\lambda x + x$$
אך אנחנו כבר ידועים ש-
$$\begin{cases} A^3 x & = & \lambda^3 x \\ Ax & = & \lambda x \end{cases}$$

ולכן

$$\left(A^3-2A+I\right)x=\left(\lambda^3-2\lambda+1\right)x$$

מתקיים.

3. הראה שאם $\lambda\neq 0$ אז x הוא ווקטור עצמי גם של A^{-1} (הנח ש-A הפיכה)

פתרון.
צריך להראות ש-

$$A^{-1}x=\mu x$$

עבור μ כלשהו.
ידוע ש-

$$Ax=\lambda x$$

לכן

$$A^{-1}Ax=A^{-1}\lambda x$$
$$\Downarrow$$
$$x=A^{-1}\lambda x$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{\lambda}x=A^{-1}x$$
$$\Downarrow$$
$$A^{-1}x=\mu x$$

עבור $\mu=\frac{1}{\lambda}$

תרגיל 5. הוכיחו ש- A לא הפיכה אם ורק אם קיים לה ע"ע $\lambda=0$

פתרון.
דבר הראשון נשים לב שבפרק הזה אנחנו מדברים רק על מטריצות ריבועיות!
$\Leftarrow$נניח ש-A לא הפיכה לכן למערכת משוואות

$$Ax=0$$

קיים פתרון לא טריוואלי מכאן

$$Ax=0=0\cdot x$$

משמע 0הוא ע"ע של A.
$\Rightarrow$נניח ש- $\lambda=0$הוא ע"ע של A, לכן

$$Ax=0\cdot x=0$$

כלומר קיים פתרון לא טריוואלי למערכת ההומגנית, לכן A אינה הפיכה.

בהצלחה!!