אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 2

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

1. הוכיחו כי כל תחום שלמות סופי הוא שדה.
2. הוכיחו:
   a. אם החבורה החיבורית של חוג עם יחידה היא ציקלית אז החוג קומוטטיבי.
   b. הוכיחו כי אם הגודל של חבורה זו ראשוני אז החוג הוא שדה.
3. הוכיחו כי אידיאל שמאלי שונה מאפס מכיל איבר הפיך אם ורק אם הוא כל החוג.
4. הוכח או הפרך:
   a. אם I אידיאל אזי הקבוצה $\{1-a : a \in I\}$ סגורה לכפל.
   b. $R(a+b) = Ra + Rb$ לכל a,b בחוג R.
   c. איחוד של אידיאלים הוא אידיאל.
   d. יהיו $R \subseteq S$ חוגים ויהי $I \lhd R$, אזי $I \lhd S$.
5. נביט בחוג $R = \{a + bx : a,b \in \mathbb{Z}_7\}$, כאשר החיבור הוא חיבור של מקדמים והכפל הוא הסטנדרטי על אברי $\mathbb{Z}_7$ וגם $x^2 = c$ לאיזשהו $c \in \mathbb{Z}_7$. קבעו האם החוג הוא שדה במקרים הבאים:
   a. $c = 2$.
   b. $c = 3$.
6. קבעו האם קיים הומומורפיזם $\varphi : R \to S$ (לאו דוקא יוניטרי) $\varphi \not\equiv 0$, כאשר:
   a. $R = \mathbb{Z}_n$ ו $S = \mathbb{Z}_m$ כאשר $m \mid n$.
   b. $R = \mathbb{Z}_n$ ו $S = \mathbb{Z}_m$ כאשר $n \mid m$ וגם $0 < m \neq n$.
7. נביט בחוג הפולינומים $R[x]$ מעל תחום שלמות R. האם I אידיאל כאשר
   a. $I = \{f \in R[x] : f(137) = 0\}$
   b. $I = \{f \in R[x] : f(1) = 10\}$
   c. $I = \{f \in R[x] : f(0) = 0\}$