תרגול סופי 2 לא׳ רימנים

(1)

תזכורת:

ⓐ. אם f אינטגרבילית בקטע, אז $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ רציפה שם.

ⓑ (= משפט היסודי)
אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ואז $F(x)=\int_a^x f(t)dt$
אז $F'(x)=f(x)$ בכל נקודת רציפות של f.

תרגיל: (מבחן של פרופ׳ בכמן)

יהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע סגור $[a,b]$
כך שמתקיים $f(x)=x^3$ לכל מספר רציונלי x ב $[a,b]$.
הוכח שהקבוצה $\{x\in[a,b] : f(x)\neq x^3\}$
היא קבוצה אפסית.

פתרון: אם f אינטגרבילית ב $[a,b]$ אזי היא אינטגרבילית בכל $[a,x]$ כאשר $a\le x\le b$, ולכן:

$$\int_a^x f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k =$$

$\alpha_k\in\mathbb{Q}$, $f(\alpha_k)=\alpha_k^3$

יהי P_n סדרה של חלוקות מנורמות עם $\lambda(P_n)\xrightarrow{n\to\infty}0$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^3\Delta x_k=\int_a^x t^3dt$$

כי t^3 אינטגרבילית.

לכן: $\int_a^x f(t)dt=\int_a^x t^3dt \quad \forall\, a\le x\le b$

$f(x)=x^3$ ברציפות בכל מקום

קבוצה נקודות שבה $f(x)\neq x^3$ הנ״ל אפסית.

Scanned by CamScanner

(2) תרגיל (ממבחן של סמ' שני) שלא פתרנו בכיתה:

יהיו $h(x),g(x)$ פונקציות אינטגרביליות ב $[a,b]$

כמו כן הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & x\in\mathbb{Q} \\ h(x) & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

אינטגרבילית רימן ב $[a,b]$.

א. הוכיחו ש: $\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b h(x)\,dx$

ב. בנוסף נתון ש g,h רציפות ב $[a,b]$.
הוכיחו כי $h(x)=g(x)$ לכל $x\in[a,b]$.

פתרון:

א. יהי P_n סדרה של חלוקות של מעדנות של $[a,b]$ כך ש $\lambda(P_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. כיוון ש f אינטגרבילית, אז לכל בחירה של נקודות α_n מתקיים:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k \underset{\alpha_k\in\mathbb{Q}}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g(\alpha_k)\Delta x_k=$$

$$=\int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow$$ כי $g(x)$ אינטגרבילית לפי הנתון.

מצד שני:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\beta_k)\Delta x_k \underset{\beta_k\notin\mathbb{Q}}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} h(\beta_k)\Delta x_k=$$

$$=\int_a^b h(x)\,dx \Rightarrow$$ כי $h(x)$ אינטגרבילית לפי הנתון:

ולכן $\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b h(x)\,dx$

ב) לכל $x\in[a,b]$ ברור כי הפונקציה אינטגרבילית

בתחום $[a,x]$ ולכן $\int_a^x g(t)dt=\int_a^x h(t)dt$

כיוון ש g,h רציפות, פונקציית המשתנה העליון

הן פונקציות גזירות ולכן לכל $x\in[a,b]$

מגד"ם

$$g(x)=h(x)$$

גזירה של אינטגרל

המשפט היסודי של אינפי

אם f אינטגרבילית בקטע, סגור $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ רציפה

ומגד"ם $F'(x)=f(x)$ בכל נק' שבה f רציפה

נוסחה המורחבת: אם $f(x)$ רציפה, ו- $g(x),h(x)$ גזירות, אזי:

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt = f(h(x))\cdot h'(x) - f(g(x))\cdot g'(x)$$

דוגמא: גזרו את הפונקציות הבאות:

א) $F(x)=\int_{1/x}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt \quad , x>0$

פתרון: נשתמש בנוסחה המורחבת:

$$\cos(x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

ב) $F(x)=\int_{x^3}^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

פתרון:

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$$

4) **שימושים:** חשבו את הגבולות הבאים:

א)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \ln(\sin(t))\,dt}{\cos^2(x)} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin(x))}{-\sin(2x)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{-\sin(x)\cdot 2\cdot\cos(2x)} = 0$$

ב)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{-x}^{x} \ln(1+\sin^2(t))\,dt}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2\ln(1+\sin^2(x))}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{1+\sin^2(x)}\cdot\left(2\sin(x)\cdot\cos(x)\right)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{4}{6}\,\frac{\sin(2x)}{x(1+\sin^2(x))} = \frac{2}{3}$$

תרגיל: מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה:
$$F(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt \quad \text{בתחום} \quad x>0.$$

פתרון: נשים לב ש $\frac{\sin(t)}{t}$ לא מוגדרת ב $x=0$,
אבל יש לה גבול שם. לכן (נגדיר)

$$G(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

כלומר:
$$F(x) = \int_0^x G(t)\,dt$$

$$F'(x) = \frac{\sin(x)}{x} = 0 \iff \sin(x)=0 \iff x=\pi n, n\in\mathbb{N}$$
(כי התחום שלנו $x>0$)

$$F''(x) = \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$$

אם $n=2k$ זוגי

$$F''(\pi n) = F''(2\pi k) = \frac{1}{2\pi k} > 0$$

(5) סוף $n=2k+1$ אי זוגי, אזי

$$F''(x)=F''((2k+1)\pi)=-\frac{1}{2\pi(2k+1)}<0$$

ולכן אלה הן נק' מקסימום.

<u>תרגיל (מבחן של ברוך בכון)</u>

נגדיר, לכל ערך x בתחום $[-1,1]$:

$$f(x)=\int_{-1}^{x}|t|\,dt$$

א) מצא את f בצורה מפורשת.

ב) מצא היכן f ~~רציפה~~ רציפה.

ג) מצא היכן f גזירה.

<u>פתרון:</u>

א) אם $x\le 0$ אזי

$$f(x)=\int_{-1}^{x}-t\,dt=-\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{x}=-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$$

אם $x>0$ אזי

$$f(x)=\int_{-1}^{0}-t\,dt+\int_{0}^{x}t\,dt=-\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{t^2}{2}\Big|_{0}^{x}=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2} & x\le 0\\ \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2} & x>0\end{cases}$$

ב) <u>רציפות (לפי הגדרה)</u>

ברור ש-f רציפה ב-$(0,1]\cup[-1,0)$ כי הן פולינ'.

נבדוק רציפות ב-$x=0$. ידוע ש-$f(0)=\frac{1}{2}$ מהגדרה.

נבדוק אם יש ל-f גבול ב-$x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=f(0)=\lim_{x\to 0^-}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$$

⑥ ולכן f רציפה ב- [-1,1]

~~ב~~. צד ב': לפי המשפט היסודי f רציפה כי היא פונקציה דומה של פונקציה |x| שהיא רציפה.

ב) צד א' (לפי הגדרה)

ברור ש f גזירה ב $[-1,0) \cup (0,1]$.

(נותר לבדוק גזירות ב $x=0$ לפי הגדרה;

(נחשב גבולות):

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{\frac{(\Delta x)^2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\Delta x} = 0 = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{-\frac{(\Delta x)^2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\Delta x}$$

צד ב' (המשפט היסודי)

|x| היא פונקציה רציפה ב [-1,1] ולכן $f(x)=\int_{-1}^{x}|t|dt$

היא גזירה ומתקיים $f'(x)=|x|$.

ולכן f גזירה ב [-1,1].

משפט: אם f,g אינטגרביליות ב [a,b] ואם $f \ge g$ לכל $\forall x\in[a,b]$ אז $\int_a^b f \ge \int_a^b g$.

צריך:

~~להוכ~~: להוכיח כי

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \le \int_0^2 e^{x^2-x}dx \le 2\cdot e^2$$

פתרון: (נמצא את מינימום ואת מקסימום מוחלט) של $f(x)=e^{x^2-x}$ ב [0,2].

$f'(x)=(2x-1)\cdot e^{x^2-x}=0 \iff x=\frac{1}{2}$

בתחום: $0<x<\frac{1}{2}$: $f'(x)<0$

בתחום $\frac{1}{2}<x<2$: $f'(x)>0$

$\Rightarrow$ $x=\frac{1}{2}$ הוא נק' מינימום של f.

7.

$f(0)=1, \quad f(\tfrac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}, \quad f(2)=e^2$

לכן $(2,e^2)$ הוא מקסימום מוחלט

$(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt[4]{e}})$ הוא מינימום מוחלט

$\Downarrow$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \le f(x) \le e^2$$

$\Downarrow$

$$\frac{2}{\sqrt[4]{e}} = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{e}} \le \int_0^2 f(x) \le \int_0^2 e^2 dx = 2\cdot e^2$$

<u>משפט הערך הממוצע האינטגרלי</u>

א"ה: f,g רציפות ב $[a,b]$, $g(x)\ge 0$ (או $g(x)\le 0$)

ואינטגרביליות. אז: ד"מ c בקטע כך ש:

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(c)\cdot\int_a^b g(x)dx$$

עבור $g(x)=1$ נקבל:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a) \quad a<c<b$$

<u>תרגיל (מבחן של פרופ' ברכמן)</u>

עבור מספר ממשי x, נגדיר: $F(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$

הוכח כי ד"מ x ממשי יחיד בקטע הפתוח $(0,1)$,

כך ש $F(x)=1$.

<u>פתרון:</u> נראה עפ"מ לפחות c אחד כך ש $F(c)=1$

$0<c<1$.

לפי משפט היסודי $F(x)$ רציפה, ולכן לפי משפט ערך

הביניים היא מקבלת את כל הערכים בין $F(0)$ ל- $F(1)$.

ולכן מספיק להראות ש- 1 נמצא בין $F(0)$ ל- $F(1)$.

$F(0)=\int_0^0 e^{t^2}dt=0$

Scanned by CamScanner

$$F(1)=\int_0^1 e^{t^2}dt \underset{\text{ממשפט ערך הממוצע}}{\Downarrow}= e^{c_1^2}\cdot 1. \qquad 0<c_1<1$$

$$\Downarrow$$

$$1<e^{c_1^2}<e$$

$$\Downarrow$$

$$F(1)>1$$

ולכן לפי משפט ערך הביניים קיים $0<c<1$ לפחות אחד
כך ש $F(c)=1$.

נראה שערך c יחיד זה:

(נגדיר) $G(x)=F(x)-1=\int_0^x e^{t^2}dt-1$

ונראה של-G יש שורש אחד לכל.

$$G'(x)=F'(x)=e^{x^2}>0$$

$$\Downarrow$$

G(x) מונוטונית עולה ולכן חותך
את ציר ה-x בלכל היותר נקודה אחת

$$\Downarrow$$

קיים לכל היותר c אחד כך ש

$$G(c)=F(c)-1=0$$

$$\Downarrow$$

$$F(c)=1$$

$$\Downarrow$$

ולכן סה"כ יש בדיוק c אחד ב $(0,1)$
כך ש $F(c)=1$.

<u>שאלה</u>: הוכח/הפרך את הטענה הבאה:

א) אם $\int_a^b f(x)=0$ אזי $f(x)\equiv 0$ מתאפס בכל נקודה.

<u>הפרכה</u>: נבחר $\sin(x)$ ב $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ולכן

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx=0$$

אבל $\sin(x)\neq 0$ מתאפס
בכל נקודה.

9) ב) (אין

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

אז $f=g$ כמעט בכל מקום.

פתרון: הפרכה: נבחר $f=x,\ g=-x$ ב $[-1,1]$

אז

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = \int_{-1}^{1} -x\,dx = 0$$

אבל $f\neq g$ כמעט בכל מקום.

תרגול (שלא עשינו בכיתה)

א) הוכח: אם f' זוגית, אז f אי זוגית.

הוכחה:

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt$$

צ"ל $f(x)=-f(-x)$

$$-f(-x) = -\int_0^{-x} f'(t)\,dt \underset{f' \text{ זוגית}}{=} -\int_0^{-x} f'(-t)\,dt = -\int_0^{x} -f'(u)\,du = \int_0^x f'(u)\,du = f(x)$$

$u=-t \Rightarrow -du=dt$, $t=0 \Rightarrow u=0$, $t=-x \Rightarrow u=x$

ב) הוכח: אם f' אי זוגית אז f זוגית.

פתרון: כמו מקודם:

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x -f'(-t)\,dt = -\int_0^{-x} -f'(u)\,du = \int_0^{-x} f'(u)\,du = f(-x)$$

$u=-t$, $-du=dt$, $t=0 \Rightarrow u=0$, $t=x \Rightarrow u=-x$

לכן $f(x)=f(-x)$ לכן זוגית.