תוכן תרגיל כיתה 6

(כולל חומר של הרצאה 5, לא כולל חומר של הרצאה 6)

1. יהי (X,T) מרחב טופולוגי, ו- $p \notin X$.
נגדיר אוסף T' תת-קבוצות בקבוצה $X' = X \cup \{p\}$ על ידי נוסחה:

$$T' = \{\emptyset\} \cup \{U \cup \{p\} | U \in T\}$$

<u>הוכיחו</u>

1.1. (X',T') מרחב טופולוגי.
1.2. (X',T') מ"ט קשיר.

<u>הוכחה 1.1</u>.

א) $\emptyset \in T'$, $X' = X \cup \{p\} \in T'$

ב) יהי $\{U'_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אסף קבוצות מ-T'. ישנן שתי אפשרויות:

- כל U'_α ריקות, אזי אחודן ריק ושייך ל-T'
- קיימים אינדקסים $\alpha \in I$ (לפחות אחד) כך ש- $U'_\alpha = \{p\} \cup U_\alpha$ כאשר $U_\alpha \in T$. נסמן קבוצת האינדקסים האלה ב-J.

$$\bigcup_{\alpha\in I} U'_\alpha = \bigcup_{\alpha\in J}(U_\alpha \cup \{p\}) = (\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha) \cup \{p\} = U'$$

כאן האחוד $\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha$ פתוח בטופולוגיה T כאחוד של קבוצות פתוחות בה. לכן $U' \in T'$, מש"ל.

ג) יהי $\{U'_i\}_{1\le i\le n}$ אסף סופי של קבוצות מ-T'. ישנן שתי אפשרויות:

- ישנה בינהן קבוצה ריק, אזי החיתוך שלהן ריק ושייך ל-T'.
- לכל האינדקסים $1 \le i \le n$ $U'_i = \{p\} \cup U_i$ כאשר $U_i \in T$.

אזי

$$\bigcap_{1\le i\le n} U'_i = \bigcap_{1\le i\le n}(U_i \cup \{p\}) = \left(\bigcap_{1\le i\le n} U_i\right) \cup \{p\} = V'$$

כאן החיתוך $\bigcap_{1\le i\le n} U_i$ פתוח בטופולוגיה T כחיתוך סופי של קבוצות פתוחות בה. לכן $V' \in T'$, מש"ל.

<u>הוכחה 1.2</u>.

<u>נניח</u> – בשלילה – ש-(X',T') אינו קשיר. אזי קימות שתי קבוצות U',V' כך ש-

(א) $U',V' \in T'$
(ב) $U' \cap V' = \emptyset$

(ג)$U' \cup V' = X'$
(ד) $U' \neq \emptyset$
(ה) $V' \neq \emptyset$

אזי לפי (ג), $p \in U'$ או $p \in V'$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש-$p \in U'$. אזי לפי (ב) $p \notin V'$. לכן לפי הגדרת T', $V' = \emptyset$.
אבל זה סותר ל-(ה). לכן -(X', T') קשיר, מש"ל.

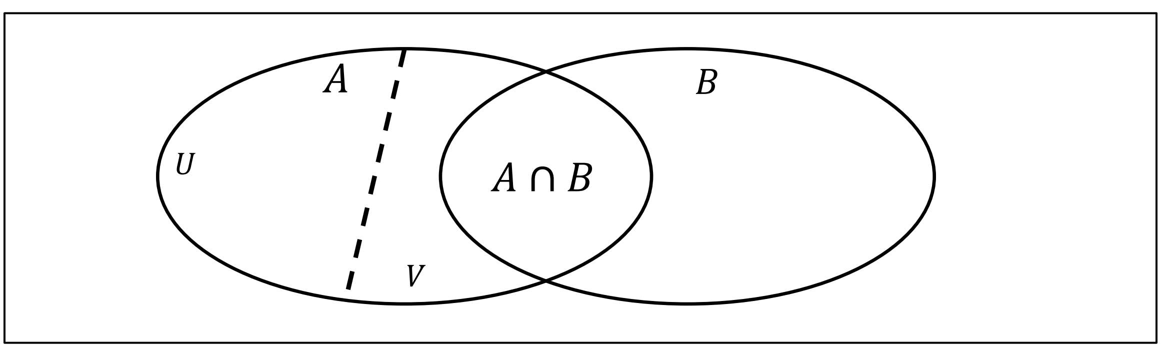
2. יהי X מרחב טופולוגי, $A \subseteq X$ תת-מרחב קשיר, ו-$A \subseteq B \subseteq \bar{A}$.
הוכיחו שלכל תת- מרחב B קשיר.

הוכחה.
לפי תכונת סגור בתת מרחב B , מקבלים:

$$\overline{A}^{B} = \bar{A} \cap B$$

אבל לפי התנאי: $\bar{A} \cap B = B$, ולכן $\overline{A}^{B} = B$. כלומר, במסגרת מרחב B תת מרחב A צפוף בו. כיוון ש- A קשיר גם הסגור שלו קשיר (לפי ההרצאה). אזי B קשיר, מש"ל.

3. יהי X מ"ט ויהיו $A, B \subseteq X$ סגורות . יהיו בנוסף $A \cap B$ ו- $A \cup B$ קשירים.
הוכיחו ש- A ו-B קשירים.



נניח – בשלילה – תת מרחב A אינו קשיר. אזי קיימים $U, V \subseteq A$ פתוחות ב-A (ולכן גם סגורות ב-A) כך שהן זרות, לא ריקות ומקיימות $A = U \cup V$. כיוון ש- $A \cap B$ תת מרחב קשיר ב-A , הוא כולו מוכל

או ב-U או ב-V (ההרצאה). בלי הגבלת הכלליות אפשר להניח ש-$V \subseteq A \cap B$ ו- $U \cap (A \cap B) = \emptyset$. מכאן נובע ש- $U \cap B = \emptyset$ וגם $U \cap (V \cup B) = \emptyset$. אבל

.$\underline{A \cup B = U \cup V \cup B = U \cup (V \cup B)}$

הקבוצה V סגורה ב-A ולכן סגורה ב-X. מזה נובע ש-$V \cup B$ סגורה ב-X.

כיוון ש-$A \cup B$ סגורה ב-X, <u>$V \cup B$ סגורה גם ב-$A \cup B$</u> .

הקבוצה U סגורה ב-A ולכן סגורה ב-X.

כיוון ש-$A \cup B$ סגורה ב-X, <u>U סגורה גם ב-$A \cup B$</u> .

אם ניזכר ש- $U, (V \cup B)$ לא ריקות, נקבל ש-$A \cup B$ תת מרחב לא קשיר.

<u>סתירה</u>.

4. יהי X מ"ט ויהי $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אוסף של תת מרחבים שלו כך ש-A_α קשיר לכל $\alpha \in I$.

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$$

הוכיחו שהאחוד

$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ גם קשיר.

<u>הוכחה</u>.

נסמן $A \coloneqq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. נוכיח שכל שתי נקודות ב-A שייכות לתת מרחב קשיר המוכל ב-A .

יהיו $a, b \in A$. אזי קיימים $\alpha, \beta \in I$ כך ש-$a \in A_\alpha$ ו- $b \in A_\beta$.

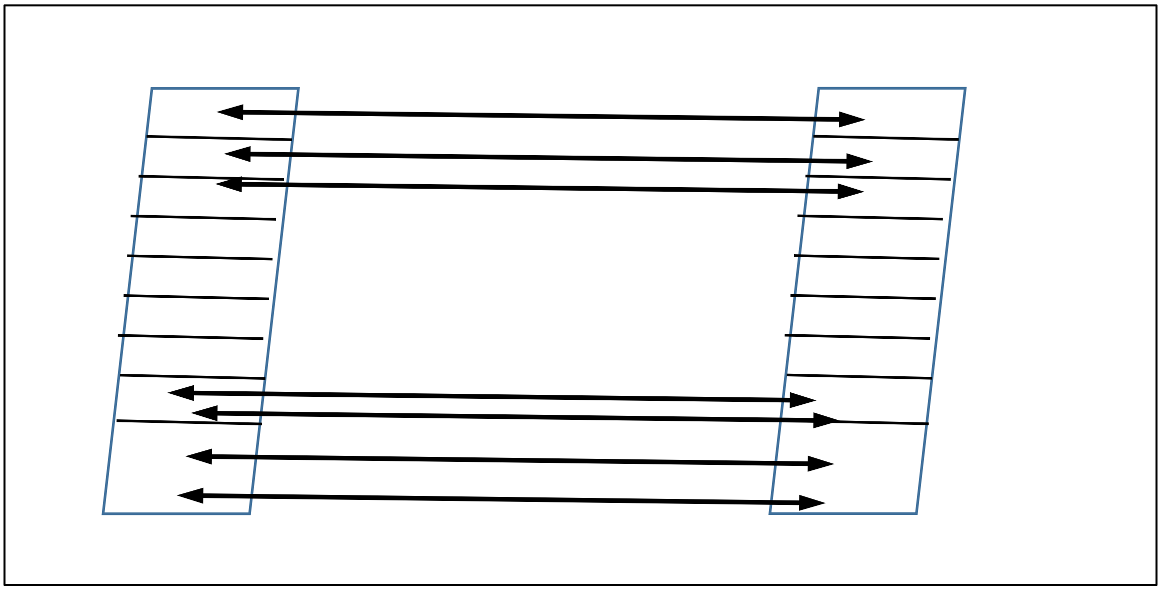
אזי $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$ כי החיתוך הזה מכיל את החיתוך הלא ריק של כל A_α .

לכן :

- $A_\alpha \cup A_\beta$ קשיר (הארצאה),
- מוכל ב-A
- ו-$a, b \in A_\alpha \cup A_\beta$.

הבחירה של $a, b \in A$ היתה שרירותית, לכן (לפי המוכח ההרצאה) תת מרחב A קשיר.

<u>תזכורת</u> (בדידהת ותורת הקבוצות)



יהיו X, Y קבוצות ו-$\varphi: X \to Y$ העתקה חח"ע ועל.

יהיו $\sim_X$ יחס שקילות על X ו- $\sim_Y$ על Y כך ש-

$$\boldsymbol{x_1 \sim_X x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) \sim_Y \varphi(x_2)} \qquad (*)$$

נסמן קבוצה של כל מכלקות השקילות $\sim_X$ ב-$\tilde{\boldsymbol{X}}$

נסמן קבוצה של כל מכלקות השקילות $\sim_Y$ ב-$\tilde{\boldsymbol{Y}}$

אם $a \in X$ נסמן ב- $[a]_X$ מחלקת שקילות בה נמצאת נקודה a.

אם $b \in Y$ נסמן ב- $[b]_Y$ מחלקת שקילות בה נמצאת נקודה b.

<u>תענה.</u>

א) העתקה $\Phi: \tilde{X} \to \tilde{Y}$ שניתנה על ידי נוסחה $\Phi([x]_X) = [\varphi(x)]_Y$ לכל x מוגדרת היטב חח"ע ועל.

<u>הוכחה</u>

<u>מוגדרת היטב:</u> יהיו $c_1, c_2 \in \tilde{X}$. אזי קיימים $x_1, x_2 \in X$ כך

ש-$c_1 = [x_1]_X,\ c_2 = [x_2]_X$. אזי

$$c_1 = c_2 \Rightarrow [x_1]_X = [x_2]_X \Rightarrow x_1 \sim_X x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \sim_Y \varphi(x_2) \Rightarrow$$

$$\Phi(c_1) = \Phi([x_1]_X) = [\varphi(x_1)]_Y = [\varphi(x_2)]_Y = \Phi([x_2]_X) = \Phi(c_2)$$

כלומר, $c_1 = c_2 \Rightarrow \Phi(c_1) = \Phi(c_2)$, מש"ל.

<u>חח"ע:</u> יהיו $c_1, c_2 \in \tilde{X}$. אזי קיימים $x_1, x_2 \in X$ כך ש-$c_1 = [x_1]_X,\ c_2 = [x_2]_X$. אם ניתן ש-$\Phi(c_1) = \Phi(c_2)$, אזי :

$$\Phi(c_1) = \Phi([x_1]_X) \wedge \Phi(c_2) = \Phi([x_2]_X) \Rightarrow [\varphi(x_1)]_Y = [\varphi(x_2)]_Y \Rightarrow$$

$$\varphi(x_1) \sim_Y \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 \sim_X x_2 \Rightarrow [x_1]_X = [x_2]_X \Rightarrow c_1 = c_2$$

כלומר, $\Phi(c_1) = \Phi(c_2) \Rightarrow c_1 = c_2$, מש"ל.

<u>על:</u> יהי $b \in \tilde{Y}$. אז קיים $y \in Y$ כך ש- $b = [y]_Y$. כיוון ש-φ על, קיים $x \in X$ כך ש- $\varphi(x) = y$. לכן $b = [\varphi(x)]_Y = \Phi([x]_X)$. אז Φ העתרת על, מש"ל.

ב) לכל x הצימצום $\varphi|_{[x]_X} \to [\varphi(x)]_Y$ הוא העתקה חח"ע ועל.

<u>הוכחה.</u> $\varphi|_{[x]_X}$ כצימצום של העתקה חח"ע.

<u>יהי</u> $y \in [\varphi(x)]_Y$. אזי:

$$y \sim_Y \varphi(x) \Rightarrow x' = \varphi^{-1}(y) \sim_X \varphi^{-1}\big(\varphi(x)\big) = x \Rightarrow x' \in [x]_X$$

כיוון ש- $\varphi(x') = \varphi\big(\varphi^{-1}(y)\big) = y$, הוכחנו ש- $\varphi|_{[x]_X}$ העתקת על.

5. נסמן ב-$[a]$ רכיב קשירות אליו שייכת נקודה a במ"ט כלשהו.
יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים ו- $\varphi: X \to Y$ הומאומורפיזם .
5.1. יהי $\sim_X$ יחס שקילות שמהווה שייכות לאותו רכיב קשירות ב-X
יהי $\sim_Y$ יחס שקילות שמהווה שייכות לאותו רכיב קשירות ב-Y
<u>הוכיחו</u> $\varphi|_{[x]} \to [\varphi(x)]_Y$ הומאומורפיזם בין רכיבי קשירות.

הוכחה. לפי התנאי 5.1. רכיבי קשירות במרחב X הן בדיוק מחלקות שקילות של יחס $\sim_X$, ורכיבי קשירות במרחב Y הן בדיוק מחלקות שקילות של יחס $\sim_Y$. כיוון שהומאומורפיזם φ העתקה חח"ע ועל, היחסים האלה מקיימים את התנאי

$$\boldsymbol{x_1 \sim_X x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) \sim_Y \varphi(x_2)}$$

כי ההומאומורפיזמים $\boldsymbol{\varphi}$ ו-$\boldsymbol{\varphi^{-1}}$ רציפים ותמונות של קבוצות קשירות תחת $\boldsymbol{\varphi}$ ו-$\boldsymbol{\varphi^{-1}}$ גם קשירות.
זה מאפשר ליישם לגבי $\boldsymbol{\varphi}$ ו-$\boldsymbol{\varphi^{-1}}$ את תענה בתזכורת למעלה. כלומר:

- לפי תענה (א') ישנה העתקה חח"ע ועל בין קבוצות רכיבי קשירות של שני המרחבים,
- לפי תענה (ב') הצימצום (תחום ותווח) של ההומאומורפיזם $\boldsymbol{\varphi}$ לרכיב קשירות מסוים הוא בעצמו העתקה חח"ע ועל.
- הצימצום כזה של $\boldsymbol{\varphi^{-1}}$ הוא בדיוק ההומאומורפיזם האפוך. זאת אומרת, הצימצומים האלה הם הומאומורפיזמים בין רכיבי קשירות של X לבין רכיבי קשירות של Y, משל.

5.2. יהיו X_1, X_2, X_3 תת מרחבים ב-$\mathbb{R}$

$$X_1 = (-1,0) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup [2,3]$$

$$X_2 = (0,1) \cup \left(3, \frac{7}{2}\right) \cup \{4\}$$

$$X_3 = \mathbb{R} - \mathbb{Z} = \cup_{i \in \mathbb{Z}} (i, i+1)$$

הוכיחו שאין ביניהם שום זוג הומאומורפיים.

הוכחה. כל אחד משלושת המרחבים הוא אחוד של קטעים זרים בזוגות (הנקודון הו מקרה פרטי של קטע סגור).
נוכיח שהקטעים האלה בכל אחד משלושת המרחבים הם רכיבי קשירות. באמת:

- הקטעים ב-$\mathbb{R}$ קשירים (הארצאה).
- הם זרים זה לזה והאחודם שלהן שווה למרחב כולו.

- הם תת מרחבים קשירים מקסימליים: אם נניח – בשלילה - שישנו תת מרחב קשיר שחותך יותר מאחד מהקטעיים שלנו, אז הקטעים הלא זרים לו מפצלים אותו לחלקים פתוחים , לא ריקים שסותר לקשירותו.

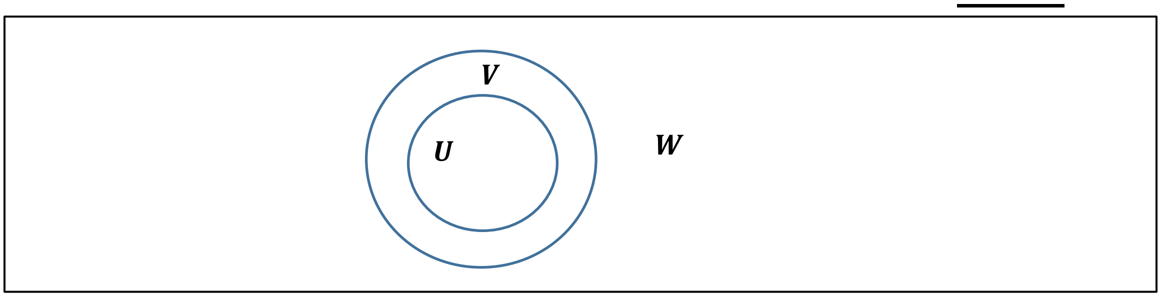
עכשיו אפשר להעיר:

- קבוצת רכיבי קשירות של X_3 היא בת מניה. לכן לא קיימת שום התקה בינה לבין קבוצת רכיבי קשירות של X_1 או של X_2 כי בקבוצות האלה סופיות. לכן (תענה, (א)) X_3 אינו הומאומורפי ל-X_1 ואינו הומאומורפי ל-X_2.
- המרחב X_2 אינו הומאומורפי ל-X_1: נניח <u>בשלילה</u> שקיים הומאומורפיזם $f: X_2 \to X_1$. אזי לפי 5.1. הנקודון $\{4\}$ הומאמורפי לאחד מהקטעיים $[2,3]$, $\left(\frac{1}{2},1\right)$, $(-1,0)$,
ו-$f(\{4\})$ – אחד מהם. <u>סתירה</u>.
הוחכנו שבין המרחבים אין אף זוג הומאמורפיים, מש"ל.

6. <u>הוכיחו</u> שמ"ט X :

<u>א'</u> $$\boldsymbol{X} = \mathbb{R}^2 - (\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = \mathbf{1}\} \cup \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = \mathbf{2}\})$$
אינו קשיר מסילתית.

<u>הוכחה</u>

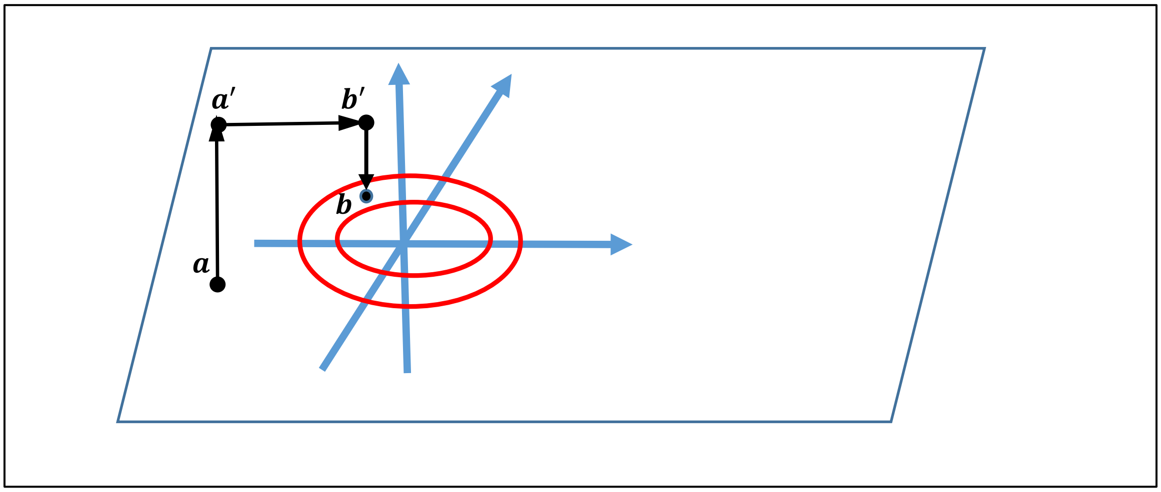


לפי הנוסחה וסרטוט קל לרות ש-X הו אחוד של שלוש קבוצות זרות, לא ריקות ופתוחות: $X = U,V,W$. לכן X אינו קשיר, אזי (ההרצאה) אינו קשיר מסילתית , משל.

ב' $\boldsymbol{X} = \mathbb{R}^3 - (\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2 = \mathbf{1}, \boldsymbol{z} = \mathbf{0}\} \cup$

$$\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2 = \mathbf{2}, \boldsymbol{z} = \mathbf{0}\})$$

קשיר מסילתית.



הוכחה

מרחב X מתקבל מ-$\mathbb{R}^3$ על ידי חיסור של שני מעגלים עם מרכז בראשית, המוכלים במישור $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$.

אם $a, b \in X$ אפשר לחבר את הנקודות במסילה שמורכבת (משורשרת) משלוש קטעים (ההראהת, שירשור המסילות):

$$[a, a'] * [a', b'] * [b', a]$$

כאשר:

$$a = (x_1, y_1, 0), \qquad b = (x_2, y_2, 0)$$
$$a' = (x_1, y_1, 1), \qquad b' = (x_2, y_2, 0)$$

קל לראות גם מהנוסחה וגם מהשרטוט שלמסילה ולמשור $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$ יש רק שתי נקודות משותפות: a ו- b.

לכן המסילה לא חותכת את המעגלים "הקריטיים" ואז כולה מוכלת ב-X.

אזי X קשיר מסחלתית, מש"ל.