אנליזה מודרנית - פתרונות למבחנים

תש"ע מועד ב':

1.

ג. נראה שחסר $f(a)-$ באגף ימין. ואז זה נובע מיידית מחלק ב' של הכללת לבג.

ד. ע"פ ג' והגדרת האינטגרל

$f(x)=f(a)+\int_a^x f'dm=\left[f(a)+\int_a^x (f')^+ dm\right]-\left[\int_a^x (f')^- dm\right]$ וכל אחת מהפונקציות

בסוגריים המרובעות עולה עם x.

2.

ב. לא. ניתן להוכיח כמו בתרגול, עם אותה סדרת חלוקות, שההשתנות אינסופית.

3.

ג. הממ"חים הם $(X,S,\mu)=(Y,T,\nu)=(\mathbb{N},P(\mathbb{N}),\#)$, והמשפט הוא:

אם $a_{m,n}:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}^*$ פונקציה אינטגרבילית $d(\#\times\#)$ [כלומר הטור הכפול $\sum_{m,n=1}^{\infty}|a_{m,n}|$

מתכנס] אזי מתקיים $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{m,n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{m,n}=\sum_{m,n=1}^{\infty}a_{m,n}$. כדי להוכיח את המשפט יש לזכור שאינטגרביליות לפי מידת הספירה פירושה התכנסות בהחלט של הטור הרלוונטי [הוכח בתרגילי הבית]

4.

ב. נראה שיש טעות בשאלה. נתבונן בממ"ח $((0,\infty),L,m)$ ובפונקציה $f(x)=x^{-1/5}$

המדידה לבג (כי היא רציפה). לכל $\lambda>0$

$$E_\lambda=\left\{x\in(0,\infty):\left|x^{-1/5}\right|\ge\lambda\right\}=\left\{x\in(0,\infty):x^{-1/5}\ge\lambda\right\}=\left\{x\in(0,\infty):x\le\lambda^{-5}\right\}=\left(0,\lambda^{-5}\right]$$

כך שמתקיים $m(E_\lambda)=\frac{1}{\lambda^5}$ כדרישות השאלה (עם $M=1$) אבל

$\int_0^\infty |f(x)|^3 dm(x)=\int_0^\infty x^{-3/5}dm(x)$ מתבדר (מאינפי). אנסה לברר עוד בימים הקרובים.

5. ב. ההעתקה $f:M\subset\ell^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x_1,x_2,\dots)=\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\cdot\frac{1}{n}$

היא לינארית. נוכיח כי היא חסומה:

$\|f(x_1,x_2,\dots)\|=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}x_n\cdot\frac{1}{n}\right\|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n\cdot\frac{1}{n}\right|\le\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}=c\|x\|$ עבור $c<\infty$. f אינה

מתקבלת ע"י מכפלה פנימית עם שום איבר ב- M (אבל היא כן מתקבלת ע"י מכפלה פנימית עם האיבר $\left(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right)\in\ell^2$ שאינו ב- M) וזוהי הסתירה.

תשע"א מועד א':

1. ה. תהי $0\le f_1\le f_2\le\dots$ סדרה עולה של פונקציות מדידות בממ"ח (X,S,μ) ויש להוכיח $\int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$ (לכל x $\{f_n(x)\}$ היא סדרה עולה, ולכן קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ושווה $\sup_n f_n(x)$. הגבול $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$ קיים אף הוא, שכן סדרת המספרים $\int_X f_n d\mu$ עולה).
נוכיח את שני הכיוונים:

$\le$ נובע מייד מפאטו. שכן ניתן להחליף את $\underline{\lim}$ בגבולות הרגילים כי הם קיימים)

$\ge$ יש להוכיח $\int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu\ge\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu$ או $\int_X \sup_n f_n d\mu\ge\sup_n\int_X f_n d\mu$. ובכן, לכל n מתקיים $\sup_n f_n\ge f_n$ ניקח אינטגרל על א"ש זה לקבל שלכל n, $\int_X \sup_n f_n d\mu\ge\int_X f_n d\mu$ ניקח sup על א"ש זה לקבל את הדרוש.

2. עשינו.

3. עשיתם.

4. ירד במיקוד!

תשע"א מועד ב':

1.

ד. תהי $E\subseteq X$ מדידה. מנתוני השאלה הפונקציות $f_1I_E, f_2I_E,\dots$ הן אי-שליליות ואינטגרביליות $d\mu$ (כי $0\le f_nI_E\le f_n$). בנוסף $f_nI_E\to fI_E$. ע"י למת פאטו מקבלים $\int_E fd\mu=\int_E \liminf f_nI_E d\mu\le\liminf\int_E f_nI_E d\mu=\liminf\int_E f_n d\mu$ ובאופן דומה $\int_{E^c} fd\mu\le\liminf\int_{E^c} f_n d\mu$. מכאן

$$\int_X fd\mu=\int_E fd\mu+\int_{E^c} fd\mu\le\liminf\int_E f_n d\mu+\liminf\int_{E^c} f_n d\mu\le\liminf\left[\int_E f_n d\mu+\int_{E^c} f_n d\mu\right]=\liminf\int_X f_n d\mu$$

והגבול האחרון קיים במובן הרגיל ולכן שווה $\lim\int_X f_n d\mu$ ומהנתון שווה $\int_X fd\mu$, כך שכל המספרים בשרשרת שווים זה לזה. ובפרט

$\int_E fd\mu+\int_{E^c} fd\mu=\liminf\int_E f_n d\mu+\liminf\int_{E^c} f_n d\mu$ ע"פ האי-שוויונות מההתחלה

$\int_E fd\mu = \liminf \int_E f_n d\mu, \left(\int_{E^c} fd\mu = \liminf \int_{E^c} f_n d\mu\right)$. תהי $\{g_n\}$ תת-סדרה של $\{f_n\}$. אז $g_n \to f$ וגם $\int_X g_n d\mu \to \int_X fd\mu$. ממה שהוכחנו $\liminf \int_E g_n d\mu = \int_E fd\mu$. לכן יש תת-סדרה $\{g_{n_k}\}$ כך ש $\lim_{k\to\infty}\int_E g_{n_k} d\mu = \int_E fd\mu$. בעצם הוכחנו כי לכל תת-סדרה של סדרת המספרים $\left\{\int_E f_n d\mu\right\}$ יש תת-סדרה המתכנסת אל $\int_E fd\mu$, מכאן $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E f_n d\mu$.

ה. נתבונן בממ"ח $([-1,1], L, m)$ ובסדרת הפונקציות $f_n = nI_{\left(0,\frac{1}{n}\right)} - nI_{\left(-\frac{1}{n},0\right)}$ המתכנסת נקודתית אל $f = 0$ אמנם $\int_{[-1,1]} f_n dm \to \int_{[-1,1]} fdm$ אבל $\int_{[0,1]} f_n dm = 1 \not\to \int_{[0,1]} fdm$

2. עשינו.

3.

ג. הופיע ברשימת התרגילים למבחן בשנים קודמות, אך השנה לא. לדעתי זה לא יהיה במבחן – ואם תרצו (ויישאר זמן) אוכל לפתור בסוף.

ד. נתון $\|f_n - f\|_p \to 0$ או $\left(\int_X |f_n - f|^p d\mu\right)^{1/p} \to 0$ או $\int_X |f_n - f|^p d\mu \to 0$. נשים לב כי $\left\{x\in X : |f_n(x) - f(x)|^p > \varepsilon^p\right\} \subseteq X$ ולכן $\int_{\{|f_n-f|^p>\varepsilon^p\}} |f_n - f|^p d\mu \le \int_X |f_n - f|^p d\mu$ ובנוסף $\int_{\{|f_n-f|^p>\varepsilon^p\}} |f_n - f|^p d\mu \ge \int_{\{|f_n-f|^p>\varepsilon^p\}} \varepsilon^p d\mu = \varepsilon^p \mu\left(\left\{x\in X : |f_n(x) - f(x)|^p > \varepsilon^p\right\}\right)$ מכאן $\varepsilon^p \mu\left(\left\{x\in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\right\}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ולכן $\mu\left(\left\{x\in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\right\}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ בגלל השאיפה לאפס קיים n_0 מספיק גדול, כך שהחל ממנו $\mu\left(\left\{x\in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\right\}\right) < \varepsilon$.

תשע"ב מועד א':

1.

ה. בגלל שמדובר בקטע סגור גם fg רציפה בהחלט, וע"פ הכללת לבג היא מקיימת את נוסחת ניוטון לייבניץ: $\int_{[a,b]} (fg)' dm = (fg)(b) - (fg)(a)$ כל שנותר לעשות הוא להשתמש בכלל המכפלה לנגזרות ולהעביר אגף.

2.

ד. נוכיח או"א

$\Rightarrow$ נניח כי f_{n_0} אינטגרבילית. נגדיר סדרה חדשה של פונקציות $g_n = f_{n_0} - f_n$ מאחר וסדרת הפונקציות f_n היא יורדת, מתקיים כי $\{g_n\}$ היא סדרה עולה של פונקציות (מדידות ו-) אי-שליליות (החל מהאינדקס n_0) ע"פ משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג:

$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X g_n d\mu = \int\limits_X \lim\limits_{n\to\infty} g_n d\mu$ או $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X \left(f_{n_0} - f_n\right) d\mu = \int\limits_X \left(f_{n_0} - f\right) d\mu$ או

$\int\limits_X f_{n_0} d\mu - \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f_{n_0} d\mu - \int\limits_X f d\mu$ כנדרש.

$\Leftarrow$ נניח בשלילה כי לכל n f_n אינה אינטגרבילית. כלומר $\int\limits_X |f_n| d\mu = \infty$ ע"י לקיחת גבול נקבל $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X |f_n| d\mu = \infty$ וע"פ ההנחה $\int\limits_X |f| d\mu = \infty$ בסתירה לאינט' של f .

3.

ג. $\Leftarrow$ נניח כי $f_n \xrightarrow{L^1} f$ כלומר $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int\limits_X |f_n - f|^1 du\right)^{1/1} = 0$ ויש להוכיח $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X |f_n| du = \int\limits_X |f| du$ או $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\int\limits_X |f_n| du - \int\limits_X |f| du\right| = 0$. ובכן

$$\left|\int\limits_X |f_n| du - \int\limits_X |f| du\right| = \left|\int\limits_X \left(|f_n| - |f|\right) du\right| \le \int\limits_X \big||f_n| - |f|\big| du \le \int\limits_X |f_n - f| du \xrightarrow{n\to\infty} 0$$ כאשר

השתמשנו בא"ש המשולש האינטגרלי ולאחריו בא"ש המשולש "ההפוך".

$\Rightarrow$ נראה שזה דורש הכללה מסוימת של משפט ההתכנסות הנשלטת. לא מצאתי דרך פשוטה לפתור זאת. אשים באתר את הפתרון שמצאתי.

תשע"ב מועד ב':

1. עשינו.

2. עשינו. (חוץ מ-ה')

ה. אין סתירה עם פוביני כי I_A לא אינטגרבילית $d(m\times u)$. ואין סתירה עם טונלי כי u אינה σ סופית על הקטע $K = [0,1]$.