קורס טופולוגיה, אוניברסיטת בר-אילן, 2022

מרצה: מיכאל מגרל **megereli@math.biu.ac.il** אתר המרצה אתר הקורס wiki סילבוס

# הרצאה 1

מילות מפתח: התכנסות, רציפות, קבוצות פתוחות, טופולוגיה ... Topology =Topos+Logos

Topology $\supset$ {Algebraic Topology, Topological Algebra, Differential Topology, …}

מרחב מטרי -- אחת מהדרכים לקבלת מרחבים טופולוגיים.

{Metric Spaces} → {Topological Spaces} (לא על, לא חח"ע)

## מרחבים מטריים קישור מומלץ

**הגדרה (Frechet 1906):** **מטריקה** (או **מרחק**) על קבוצה $X \neq \emptyset$ היא פונקציה

$$d : X \times X \to [0,\infty) \qquad (x,y) \mapsto d(x,y)$$

אקסיומות:

$m_1$) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

$m_2$) $d(x,y) = d(y,x)$.

$m_3$) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ (אי שוויון המשולש).

(שקול: $d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \cdots + d(x_{n-1},x_n)$) **אינדוקציה !**

אומרים ש - $(X,d)$ **מ"מ** (metric space).

## דוגמאות:

1) $(\mathbb{R}, d)$ שמוגדרת לפי $d(x,y) = |x-y|$

2) $X = \mathbb{R}^n$ $x = (x_1,..,x_n)$ , $y = (y_1,..,y_n)$

א. מטריקה אוקלידית $(\mathbb{R}^n, d)$ $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

ב. מטריקת הסכום *Manhattan metric*

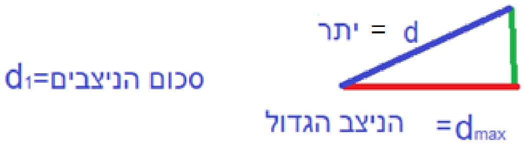
$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

ג. מטריקת המקסימום

$$d_{\max}(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : i \in \{1,\cdots,n\}\}$$

הערה: $d_{\max} \leq d \leq d_1 \leq n d_{\max}$.

מקרה של $n=2$




<u>**הגדרה:**</u> (**מרחב נורמי**) נניח $E$ מרחב ווקטורי על שדה $\mathbb{R}$.

פונקציה $\|\cdot\|: E\to[0,\infty)$ נקראת **נורמה** אם מתקיים:

$(n_1$ $\|\mathrm{v}\|=0 \Leftrightarrow \mathrm{v}=0_E$

$(n_2$ $\|\mathrm{cv}\|=|\mathrm{c}|\cdot\|\mathrm{v}\|$ לכל $c\in\mathbb{R}, v\in E$

$(n_3$ $\|\mathrm{u}+\mathrm{v}\|\le\|\mathrm{u}\|+\|\mathrm{v}\|$

אז $(E,\|\cdot\|)$ נקרא **מרחב נורמי** [normed space](normed space)

**משפט:** לכל מ"נ $(E,\|\cdot\|)$ הפונקציה $d_{\|\cdot\|}(u,v):=\|u-v\|$ $\quad d_{\|\cdot\|}: \mathrm{E}\times\mathrm{E}\to[0,\infty)$

היא מטריקה (שנקראת מטריקה של הנורמה) **ותמיד מתקיים** $\|\mathrm{v}\|=d_{\|\cdot\|}(0_E,\mathrm{v})$.

**הוכחה:**

$(m_1$ $d(x,y)=\|x-y\|=0\Leftrightarrow x-y=0_E\Leftrightarrow x=y$

$(m_2$ $\|x-y\|=\|(-1)(y-x)\|=|(-1)|\cdot\|y-x\|=\|y-x\|$

$(m_3$ $\|x-z\|=\|(x-y)+(y-z)\|\le\|x-y\|+\|y-z\|$

$\|\mathrm{v}\|=\|-v\|=\|0_E-\mathrm{v}\|=d_{\|\cdot\|}(0_E,\mathrm{v})$ .

**הערה:** "ההתאמה" $(E,\|\cdot\|)\mapsto(\mathrm{E},d_{\|\cdot\|})$ $\quad \{normed\ spaces\}\to\{metric\ spaces\}$

א. **לא על**

**הסבר:** למשל מרחב מטרי עם 2 נקודות או מרחב מטרי מעגל עם מטריקה אוקלידית "לא מתקבלת "בתמונה" של ההתאמה הנ"ל.

ב. **חד חד ערכית**

**הסבר:** נובע מהשוויון $\|\mathrm{v}\|=d_{\|\cdot\|}(0_E,\mathrm{v})$. מטריקת הנורמה משחזרת את הנורמה.

דוגמאות של מרחב נורמי:

- במרחב ווקטורי $\mathbb{R}^n$ בעל ממד n נגדיר:

א. נורמה אוקלידית $\| x \|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}$ (משרה מטריקה אוקלידית)

ב. נורמה של הסכום $\| x \|_1=\sum_{i=1}^{n} | x_i |$ (משרה מטריקת הסכום)

ג. נורמה של מקסימום $\| x \|_\infty=\| x \|_{\max}=\max\{| x_i |: i\in\{1,\cdots,n\}\}$

(משרה מטריקת מקסימום)

הערה: $\| x \|_{\max}\le\| x \|\le\| x \|_1\le n\| x \|_{\max}$

* בקבוצה $\mathrm{C}[a,b]:=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\ \ continuous\ \ functions\}$ נגדיר:

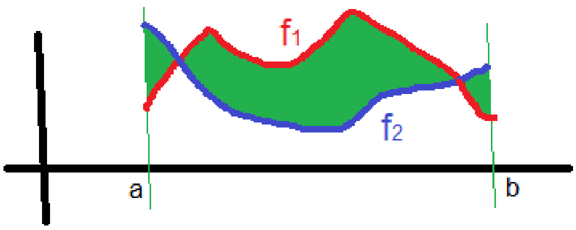
א. $\| f \|_{\max}=\max\{| f(x) |: x\in[a,b]\}$ . מסמנים גם $\| f \|_\infty$.

משרה מטריקת מקסימום $d_{max}(f_1,f_2)=\max\limits_{a\le x\le b}|f_1(x)-f_2(x)|$ (מדוע מתקבל *Max* ?)

"הסטייה" המקסימלית בין הפונקציות $f_1,f_2$ בקטע נתון.

ב. $\| f \|_1=\int_a^b |f(x)|\,dx$ משרה "מטריקת השטחים" $d_1(f_1,f_2)=\int_a^b | f_1(x)-f_2(x) |\,dx$

"השטח" בין הגרפים של הפונקציות $f_1,f_2$ בקטע $[a,b]$




**הגדרה:** $(X,d)$ נקרא **מרחב פסאודו-מטרי** ($pseudometric$, נקרא $semimetric$ לפעמים) אם:

$m_1^p$) $x=y \Leftarrow d(x,y)=0$ (החלשה של $m_1$).

$m_2$) $d(x,y)=d(y,x)$.

$m_3$) $d(x,y)+d(y,z)\ge d(x,z)$

**הגדרה:** $(X,d)$ נקרא **מרחב אולטרה-מטרי** ultrametric אם:

$m_1$) $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.

$m_2$) $d(x,y)=d(y,x)$.

$m_3^u$) $\max\{d(x,y),d(y,z)\}\ge d(x,z)$ (חיזוק של $m_3$).

$\{pseudometric\}\supset\{metric\}\supset\{ultrametric\}$

**הערה:** לכל מטריקה $d$ גם $c \cdot d$ מטריקה $\forall c > 0$ (נכון גם עבור פ"מ, אולטרה-מטריקה)

- לכל קבוצה $X$ נגדיר $\forall x, y \in X : d_0(x,y) = 0$
  *פסאודו מטריקת האפס.*
- ב - $X = \mathbb{R}^2$, נגדיר $\rho_1(x,y) \coloneqq |x_1 - y_1|$

פסאודו-מטריקה (אבל לא מטריקה). למשל $\rho_1((3,5),(3,18)) = 0$ .

ב - $X = \mathbb{R}^n$, נגדיר $\rho_k(x,y) \coloneqq |x_k - y_k|$ (הרכיב ה k )

- ב $X = C[0,5]$ $\|f\|_{1 \le x \le 2} = \max\{|f(x)| : x \in [1,2]\}$ semi-norm (מדוע לא נורמה ?)
- נגדיר על קבוצה $X$ " אולטרה-מטריקת 1-0":

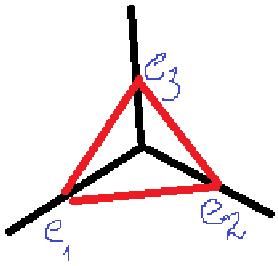
$$d_\Delta(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

**טענה**: על כל קבוצה $X$ עם $|X| \geq 2$ יש (לפחות) $\aleph = 2^{\aleph_0}$ מטריקות שונות.

**הסבר:** $card\{rd_\Delta : r > 0\} = card(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$ העוצמה

**תרגיל:** $X = \left\{\frac{e_1}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{e_n}{\sqrt{2}}\right\} \subset \mathbb{R}^n$

עם מטריקה שמושרית מ $d$ נותן דוגמה ספציפית של $d_\Delta$.




**הסבר:** $d\left(\frac{e_i}{\sqrt{2}}, \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right) = \left\|\frac{e_i}{\sqrt{2}} - \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\|e_i - e_j\|}_{\sqrt{2}} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$

נשים לב: כאשר $i \neq j$ $\|e_i - e_j\| = \sqrt{\dots + 1^2 + \dots + 1^2 + \dots} = \sqrt{2}$

- **דוגמה חשובה:** על שלמים $\mathbb{Z}$ נגדיר **מטריקה p-אדית** לכל מספר ראשוני $p \in \mathbb{P}$ נתון.

$$d_p(x,y) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{p^{k(x,y)}}, k(x,y) \coloneqq \max\{i : p^i | (x-y)\}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$ אולטרה-מטריקה

**למשל:** $x = 24,\ y = 6\ ,\ p = 3$. $d_3(24,6) = ?$

$d_3(24,6) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

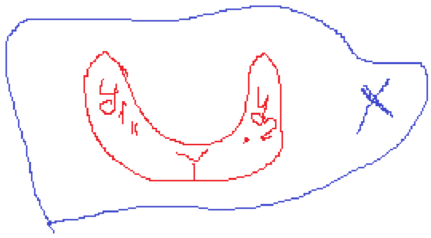
$24 - 6 = 18 = 3^2 \cdot 2$

$$d_3(0,5) = d_3(0,1) = 1$$

**<u>דוגמה חשובה:</u>** (קובית קנטור) ב $X=\{0,1\}^{\mathbb{N}}=\{(a_1,a_2,\cdots):\quad a_k\in\{0,1\}\}$

$d(x,y):=\begin{cases}\frac{1}{2^{k(x,y)}}\ ,k(x,y):=\min\{i:\ \ x_i\neq y_i\},\ x\neq y\\ 0,\ \ x=y\end{cases}$ אולטרה-מטריקה

**<u>הגדרה</u> (תת מרחב מטרי):** יהי $(X,d)$ מ"מ, $\emptyset\neq Y\subseteq X$.




**מטריקת הצמצום של $Y$** מוגדרת:

$$d_Y\,(y_1,y_2\,)=d(y_1,y_2\,)$$
$$\forall y_1,y_2\in Y$$

מתקבל מ"מ $(Y,d_Y)$ שנקרא **תת מרחב מטרי** של $(X,d)$.

**<u>למשל:</u>** $\underbrace{Y=\left\{\frac{e_i}{\sqrt{2}},1\leq i\leq n\right\}}_{\text{ת"מ מטרי}}\subset\underbrace{(\mathbb{R}^n,d)}_{=X}$

מטריקת הצמצום על $Y$ כאן שווה ל - $d_\Delta$.

**<u>הערה</u>**: כל מ"מ הוא תת מרחב מטרי (עד כדי איזומטריה) של מרחב נורמי (נוכיח בהמשך).

**<u>הגדרה:</u>** נתון מ"מ $(X,d)$, $\emptyset\neq A,B\subseteq X$.

$$\boldsymbol{d(A,B)}=\inf\{d(a,b)|a\in A,b\in B\}$$
$$0\leq d(A,B)<\infty$$

**<u>אזהרה:</u>** זאת לא מטריקה וגם לא פסאודו-מטריקה בקבוצה $P(X)$ של תת קבוצות.

**<u>הערה:</u>** לא תמיד $inf$ ניתן להחליף ב - $min$.

$$A=\{x\in\mathbb{R}|x<0\}\,,B=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$$
$$min\neq inf=d(A,B)=0$$

**<u>אישוויון חשוב:</u>** תמיד מתקיים $|d(x,A)-d(y,A)|\leq d(x,y)$ (ראו בתירגול)

**<u>הגדרה</u> (הקוטר):** $\boldsymbol{diam(A)}:=\sup\{d(x,y)|x,y\in A\}$

$$0\leq diam(A)\leq\infty$$

$A$ נקראת **חסומה** אם $diam(A)<\infty$.

**<u>הערה:</u>** לא תמיד $sup=max$ $\quad A=(0,1)\quad max\ldots\neq sup\ldots=diam=1$

דוגמה: $diam(\mathbb{Z},d_p)=1$.

$$d_p(0,1)=1 \quad \forall k\in\{0,1,\cdots\} \quad \tfrac{1}{p^k}\le 1$$

**הגדרות:** יהי $(X,d)$ , $a\in X$ , $r>0$.

1) **כדור פתוח** עם מרכז ב – $a$ ורדיוס $r$ = $a\in B(a,r)=B_r(a):=\{x\in X|d(a,x)<r\}$

2) **כדור סגור** $a\in B[a,r]=B_r[a]:=\{x\in X|d(a,x)\le r\}$

3) **ספרה** *sphere* $a\notin S(a,r)=S_r(a):=\{x\in X|d(a,x)=r\}$

**הערה:** $a\in B(a,r)\subseteq B[a,r]$ $\qquad \underbrace{S(a,r)}_{a\notin}\subsetneq \underbrace{B[a,r]}_{a\in}$

**דוגמה:** לתאר $B(a,r),B[a,r],S[a,r]$ במרחב $(X,d_\vartriangle)$.

למשל: $S[a,r]=\begin{cases}\varnothing & 0<r\ne 1\\ X\setminus\{a\} & r=1\end{cases}$ ....... (המשיכו !)

**דוגמה:** ב $(\mathbb{Z},d_3)$ $\qquad B[0,\tfrac{1}{3}]=3\mathbb{Z}$

הסבר: $B[0,\tfrac{1}{3}]=\{x\in\mathbb{Z}:\ \ d_3(x,0)\le\tfrac{1}{3}\}=\{x\in\mathbb{Z}:\ \ 3\,|\,x\}=3\mathbb{Z}$

**תכונות:** (לבדוק !)

א) $0<r_1\le r_2\Rightarrow B_{r_1}(a)\subseteq B_{r_2}(a)$.

ב) $diam\big(B_r(a)\big)\le 2r$ (לא תמיד שווה. דוגמה ?).

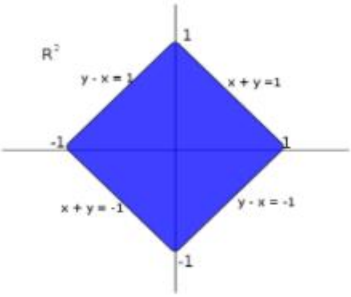
ג) $A\subseteq X$ חסומה $\Leftrightarrow \exists z\in X,\exists r>0: A\subseteq B_r(z)$.

ד) (**כדור בתת מרחב**) $B_{d_Y}(y,\epsilon)=B(y,\epsilon)\cap Y$

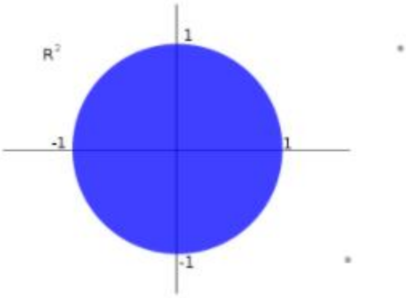
ה) $d\le\rho\Rightarrow B_\rho(a,r)\subseteq B_d(a,r)$

**דוגמה:** לתאר $B(a,r)$ במרחבים $(\mathbb{R}^2,d_{max}),(\mathbb{R}^2,d_1),(\mathbb{R}^2,d)$

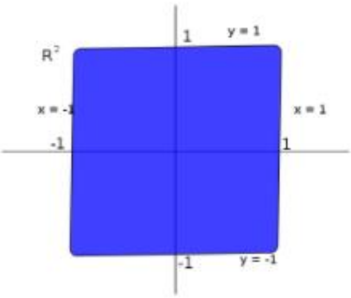
- The metric induced by $\|\cdot\|_1$ in that case, the unit ball is: $|x|+|y|<1$




- The metric induced by $\|\cdot\|_2$ in that case, the unit ball is: $\sqrt{x^2+y^2}<1$




- The metric induced by $\|\cdot\|_\infty$ in that case, the unit ball is: $\max\{|x|,|y|\}<1$




**הגדרה:** $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ (בין מרחבים – מטריים). אומרים ש – $f$

**שיכון איזומטרי** אם **שומרת מרחקים**, כלומר $\forall x_1,x_2\in X: \rho\big(f(x_1),f(x_2)\big) = d(x_1,x_2)$

**איזומטריה** אם $\begin{cases} f(X)=Y \\ f \text{ שומרת מרחקים}\end{cases}$

**טענה:** כל שיכון איזומטרי תמיד חח"ע.

**הוכחה:** אם $x_1\neq x_2$ נניח ש $f(x_1)=f(x_2)$

אז לכן $0=\rho\big(f(x_1),f(x_2)\big) = d(x_1,x_2) \underbrace{>}_{m_1} 0$

בסתירה!

■

שימו לב: אם $f:X\to Y$ שיכון איזומטרי אם ורק אם $f:X\to f(X)$ איזומטריה.

**הערה:** איזומטריה ב $Metr$ בתפקיד של איזומורפיזמים. ז"א יש אותן תכונות מטריות.

- $[5,6] \simeq [1,2] \not\simeq [8,10]$

**הסבר:** הזזה ל 4 יחידות בממשיים היא איזומטריה

$$T_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 4 + x$$

משרה איזומטריה $[1,2] \to [5,6]$

ב $[8,10]$ קיימות נקודות $x, y$ כך ש $d(x,y) = 2$ אבל לא ב $[1,2]$.

(הסבר אחר: המרחבים עם קוטר שונה. אבל **קוטר נשמר ע"י איזומטריה**)

- שיכון איזומטרי לינאר $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ לכל $m \le n$ (**להשלים**)
- כל הזזה $T_a(v) = a + v$ $\quad T_a : E \to E$ במרחב נורמי $a \in E$ היא איזומטריה.

**הסבר:** $\| (a+v_1) - (a+v_2) \| = \| v_1 - v_2 \|$

- כל הזזה $T_a(x) = a + x$ $\quad T_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ במרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$ היא איזומטריה.

(**להשלים**)

- $(\mathbb{Z}, d_5)$ לא איזומטרי עם $(\mathbb{Z}, d_3)$.

**הסבר:** ב $(\mathbb{Z}, d_5)$ קיימות נקודות $x, y$ כך ש $d_5(x,y) = \frac{1}{5}$ אבל לא ב $(\mathbb{Z}, d_3)$.

- קיים שיכון איזומטרי $\mathbb{R}^n \to l_2$.

(**להשלים**) דומה למקרה של $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ לכל $m \le n$.

- קיים שיכון איזומטרי $(\mathbb{N}, d_\triangle) \to l_2$.

**הסבר מהיר:** $n \mapsto \frac{e_n}{\sqrt{2}}, \quad (\mathbb{N}, d_\triangle) \to \{\frac{e_n}{\sqrt{2}} : n \in \mathbb{N}\}$ איזומטריה.

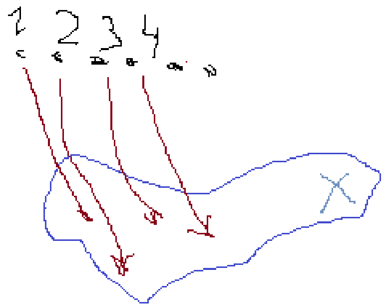
הערה: *מרחב הילברט סדרתי* $l_2 = \{x = (x_1, x_2, \cdots) : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$

$$\| x \| := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} \qquad < x, y > := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$ מכפלה סקלרית (פנימית)

## התכנסות סדרות

**הגדרה (תזכורת):** **סדרה** $x_n$ בקבוצה $X$ היא פונקציה $f : \{1,2,\cdots\} = \mathbb{N} \to X,\ n \mapsto f(n) = x_n$.

***תת סדרה*** $x_{n_k}$ היא צמצום הפונקציה על תת קבוצה אינסופית $n_1 < n_2 < n_3 \cdots$




**<u>הגדרה:</u>** אומרים שסדרה $x_n$ **מתכנסת** ל $a \in X$ במרחב $(X,d)$

ונסמן $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (או $x_n \xrightarrow{d} a$) אם מתקיים:

הגדרה 1: $\lim\limits_{n\to\infty} d(a,x_n) = 0$

הגדרה 2: כל $\varepsilon$-סביבה $B(a,\varepsilon)$ של $a$ מכילה כמעט כל האיברים של הסדרה $x_n$

הגדרה 3: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(a,x_n) < \varepsilon$

דוגמה: ב $(\mathbb{Z}, d_3)$ $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n = 0$

**הסבר:** $d_3(3^n,0) = \frac{1}{3^n} \to 0$ .

**<u>הערה:</u>**

- סדרה קבועה לבסוף תמיד מתכנסת (ברור מה הגבול !) בכל מרחב $(X,d)$.
- תת סדרה של סדרה מתכנסת גם מתכנסת (ברור מה הגבול !)
- נניח $\rho \leq d$ . אז $x_n \xrightarrow{d} a \quad \Leftarrow \quad x_n \xrightarrow{\rho} a$.

**הסבר:** $0 \leq \rho(a,x_n) \leq d(a,x_n) \to 0$ בעזרת *תכונת סנדוויץ'* $\rho(a,x_n) \to 0$ .

- התכנסות ב $\mathbb{R}^n$ היא התכנסות רכיב-רכיב.

**הסבר:** התכנסות גוררת "התכנסות רכיב-רכיב" כי $0 \leq \| v^{(m)} - u \|_k \leq \| v^{(m)} - u \| \xrightarrow{m\to\infty} 0$

($\| x \|_k$ "סמי-נורמה לפי קואורדינטה ה $k$ " שהגדרנו)

גם ההפך נכון. תשתמשו בזה ש $\sum\limits_{k=1}^{n} \| v \|_k =$ "נורמה של הסכום".

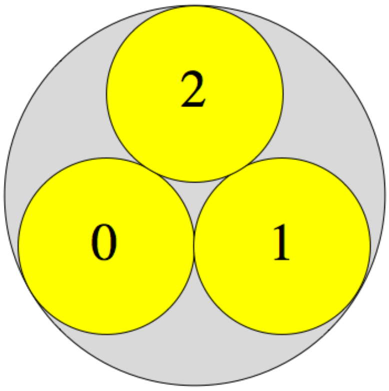
**תרגיל**: תנו דוגמה של סדרה לא מתכנסת ב $l_2$ שמתכנסת רכיב-רכיב.

**הסבר:** הסדרה הבאה מתכנסת רכיב רכיב לווקטור האפס

$$e_1=(1,0,0,0\cdots)$$
$$e_2=(0,1,0,0\cdots)$$
$$e_3=(0,0,1,0\cdots)$$
$$\cdots$$

$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ לא מתכנסת כי $\forall i\neq j \quad d(e_i,e_j)=\sqrt{2}$

**<u>*תרגיל:</u>** לפי האיור הבא תרכיבו ניסוח לתרגיל אפשרי לגבי מ"מ $(\mathbb{Z},d_3)$




**ניסוח אפשרי:** המרחב אפשר להציג כאיחוד של שלושה כדורים סגורים עם רדיוס $\frac{1}{3}$.

הסבר: $B_{\frac{1}{3}}[0]\cup B_{\frac{1}{3}}[1]\cup B_{\frac{1}{3}}[2]=3\mathbb{Z}\cup(3\mathbb{Z}+1)\cup(3\mathbb{Z}+2)=\mathbb{Z}$

**<u>הגדרה:</u>** נק' $a\in X$ נקראת **מבודדת** (isolated) אם $\exists\epsilon>0:\ \ B(a,\epsilon)=\{a\}$

<u>דוגמאות:</u> א. אין נקודה מבודדת ב $\mathbb{R}$ או ב $\mathbb{Q}$ ...

ב. נקודה 3 מבודדת בתת מרחב $X=[0,1]\cup\{3\}$ של $\mathbb{R}$.

**<u>הגדרה:</u>** מ"מ $(X,d)$ נקרא **<u>דיסקרטי</u>** אם כל נקודה ב X מבודדת.

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, כל מרחב $X$ עם מטריקת 0-1 הם דיסקרטיים.
- (Hamming distance)

בקבוצה $F(\mathbb{N})=\{(x_1,x_2,\cdots):\quad x_i\in\{0,1\}\ \ \exists\, k\in\mathbb{N}\ x_i=0\ \ \forall\, i>k\}$

$$d_H(x,y)=\sum_i|x_i-y_i|$$

$(F(\mathbb{N}),d_H)$ מרחב מטרי כך שהטופולוגיה שלו היא דיסקרטית.

המשמעות של $d_H(x,y)$ היא מספר ההבדלים בין המילים $x,y$.

מ"מ $(F(\mathbb{N}),d_H)$ משוכן לתוך מרחב נורמי $l_1=\{x=(x_1,x_2,\cdots):\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|<\infty\}$.

מרצה: מיכאל מגרל **megereli@math.biu.ac.il** אתר המרצה אתר הקורס wiki סילבוס

# הרצאה 2

**משפט:** $a$ נקודה מבודדת במרחב **מטרי** $(X,d)$ אם ורק אם

$\lim x_n = a$ גורר שהסדרה $x_n$ היא בהכרח קבועה לבסוף $x_1,\cdots,x_m,a,a,\cdots$.

**בכיוון שני נוכיח יותר: אם a לא מבודדת אז שקיימת סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל $a$.**

הוכחה: אם $a$ מבודדת אז קיים $\varepsilon>0$ כך ש $B(\mathrm{a},\varepsilon)=\{\mathrm{a}\}$.

**(כיוון ראשון)** נניח ש $\lim x_n = a$.

עבור $\varepsilon$ הנ"ל קיים $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ כך ש $x_n\in B(\mathrm{a},\varepsilon)=\{\mathrm{a}\}$. אז הסדרה היא לבסוף $a$.

**(כיוון שני)** נניח כעת שנקודה $a$ לא מבודדת.

נוכיח: **שקיימת סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל $a$.**

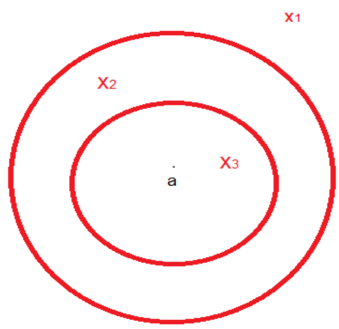
נבחר $x_1\neq a$ (אם לא קיים אז המרחב הוא נקודון $X=\{a\}$ והנקודה מבודדת).

נעיר ש $0<d(a,x_1)$ כי $(X,d)$ מרחב מטרי ומתקיימת $m_1$.

נבחר $0<\varepsilon_1<\min\{d(a,x_1),1\}$

בגלל ש $a$ לא מבודדת קיים $x_2\in B(a,\varepsilon_1), x_2\neq a$.

נעיר ש $x_2\neq x_1$ כי $d(a,x_2)<d(a,x_1)$. וגם $d(a,x_2)<1$.




נמשיך בצורה רקורסיבית את הבנייה.

אם כבר הגדרנו $x_1,\cdots,x_n$ (שונים) $d(a,x_n)<d(a,x_{n-1})<\cdots<d(a,x_1)$

ולא שווים ל $a$ עם התנאי $\forall 1<k\le n \;\; d(a,x_k)<\frac{1}{k-1}$

אז נבחר $\varepsilon_n$ שמקיים $0<\varepsilon_n<\min\{d(a,x_n),\frac{1}{n}\}$

ונבחר $x_{n+1}$ כך ש $x_{n+1}\ne a$ , $d(a,x_{n+1})<\varepsilon_n$ (שוב, שימו לב ש $a$ לא מבודדת)

אז $d(a,x_{n+1})<d(a,x_n)<d(a,x_{n-1})<\cdots<d(a,x_1)$.

כך נקבל סדרה עם איברים שונים ו $\lim x_n=a$ כי לכל $n>1$ $d(a,x_n)<\frac{1}{n-1}\to 0$.

☺

**תרגיל:** הוכיחו שלא קיימת נקודה מבודדת ב $(\mathbb{Z},d_p)$.

הסבר: $\forall a\in\mathbb{Z} \quad a+p^n\xrightarrow{d_p}a$ סדרה עם איברים שונים שמתכנסים ל $a$ .

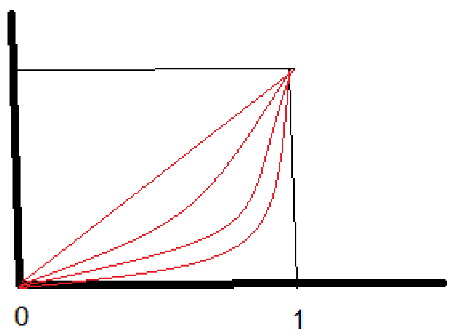
**דוגמה:** ב - $C[0,1]$ קיימת סדרה $f_n$ כך ש

$$\begin{cases} f_n\overset{d_1}{\to}\theta \\ f_n\overset{d_{max}}{\nrightarrow}\theta \end{cases}$$

$d_1(f_1,f_2):=\int_0^1|f_1(x)-f_2(x)|dx \qquad d_{max}(f_1,f_2):=\max\limits_{0\le x\le 1}|f_1(x)-f_2(x)|$.

הסבר:

נגדיר סדרה של פונקציות (סדרה ב - $C[0,1]$) $\quad f_n(x)=x^n\,, x\in[0,1] \quad \theta(x)=0$




$$d_1(f_n,\theta)=\int_0^1|f_n(x)-0|dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$f_n\overset{d_1}{\to}\theta \qquad \lim_{n\to\infty}d_1(f_n,\theta)=0$$

מצד שני

$$d_{max}(f_n,\theta)=\max_{0\le x\le 1}|f_n(x)-0(x)|=\max_{0\le x\le 1}x^n=1\nrightarrow 0$$

$$\Rightarrow d_{max}(f_n,\theta)\nrightarrow 0$$

$$\Rightarrow f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} \theta$$

**תרגיל:** באופן דומה לכל $[a,b]$ , $a<b$.

**<u>הגדרות:</u>**

א) נניח $d,\rho$ מטריקות על <u>אותה קבוצה</u> $X$. אומרים ש – $d$ **דומיננטי ביחס ל –** $\rho$ אם:

$$\boxed{x_n \overset{d}{\to} a \Rightarrow x_n \overset{\rho}{\to} a}$$

לכל סדרה $x_n\in X$.

ב) אומרים ש - $d\sim\rho$ **("שקולות")** אם יש אותה התכנסות. ז"א

$$\boxed{x_n \overset{d}{\to} a \Leftrightarrow x_n \overset{\rho}{\to} a}$$

**<u>תכונות פשוטות:</u>**

1) $d\sim c\cdot d$, $c>0$ קבוע.

2) $\rho\le cd$ $\Leftarrow$ $d$ דומיננטי ביחס ל $-\rho$ (הסבר: דרך תכונת הסנדוויץ').

3) מטריקת 1-0 (או כל מטריקה עם טופולוגיה דיסקרטית) דומיננטית ביחס לכל מטריקה.

הסבר: כי לגבי מטריקת 1-0 נקבל מרחב דיסקרטי. כל נקודה מבודדת. במרחב כזה יש רק התכנסות קבועה לבסוף. מצד שני כל סדרה שהיא קבועה לבסוף מתכנסת לגבי כל מטריקה על אותה קבוצה.

**דוגמה:** $d_{max}$ דומיננטי ביחס ל - $d_1$ בקבוצה $C[a,b]$.

**<u>הסבר:</u>** מ"ל – $d_1\le c\cdot d_{max}$.

ש"ל – $\|\cdot\|_1\le c\cdot\|\cdot\|_{max}$.

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(x)|dx\le\int_a^b max|f(x)|dx\le\underbrace{(b-a)}_{c>0\ \text{קבוע}}\cdot\underbrace{\max_{a\le x\le b}|f(x)|}_{=\|f\|_{max}}$$

הוכחנו $\|\cdot\|_1\le(b-a)\cdot\|\cdot\|_{max}$.

**<u>דוגמה:</u>** $X:=\mathbb{R}^n$. $\boxed{d_{max}\sim d\sim d_1}$

**<u>הסבר:</u>** $\boxed{d_{max}\le d\le d_1\le n\cdot d_{max}}$

**<u>מסקנה:</u>** שלושת המטריקות הנ"ל שונות אבל יש אותה התכנסות.

<u>בהמשך נוכיח</u> – הטופולוגיות שוות!

## הגדרה חשובה: (טופולוגיה של $(X,d)$)

נגדיר טופולוגיה של מ"פ $(X,d)$ כאוסף של כל תת-קבוצות **פתוחות** ב $X$ . נסמן:

$$\boldsymbol{top(d)} = top(X,d) \coloneqq \{\text{קבוצות פתוחות ב } (X,d)\}$$

כאשר **"קבוצה פתוחה"** מוגדרת כך:

אומרים ש - $O \subseteq X$ היא פתוחה אם (כל נקודה שלה **פנימית**) מתקיים:

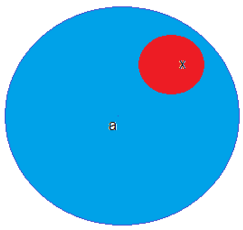
$$\boxed{x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq O}$$

<u>שימו לב:</u> תת קבוצה $A \subseteq X$ **לא פתוחה** ב $(X,d)$ אם"ם <u>קיימת</u> נקודה $a \in A$ כך ש $B(a,\varepsilon)$ לא מוכל ב $A$ לכל $\varepsilon > 0$.

הערה: מכאן ברור למשל $\emptyset \in top(d)$.

**<u>משפט:</u>** $\forall r > 0, \forall a \in X, \forall (X,d) : B_r(a) \in top(d)$ .

(ז"א "כדור פתוח" קבוצה פתוחה).




**<u>הוכחה:</u>** <u>הרעיון:</u> $d(a,x) + r_x < r$.

מכאן ניקח כל מס' $r_x$ כך: $0 < r_x < \underbrace{r - d(a,x)}_{\substack{\text{חיובי} \\ \text{כי } x \in B_r(a)}}$

נוכיח $B_{r_x}(x) \subseteq B_r(a)$.

נניח $y \in B_{r_x}(x)$ , צ"ל - $y \in B_r(a)$.

$$d(a,y) \underbrace{\leq}_{m_3} d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + r_x < r$$

$$\Rightarrow d(a,y) < r$$

ז"א $y \in B_r(a)$.

זה קורה עבור כל $x \in B_r(a)$ (ועבור $r_x$ מתאים) ולכן $B_r(a)$ קבוצה פתוחה.

☺

**תוצאה:** {כדורים פתוחים} **בסיס לטופולוגיה** $(top(d))$

$$top(d) \ni O = \cup_{x \in O} B_{\epsilon_x}(x)$$

התנאים הבאים שקולים:

1) $\emptyset \neq O \in top(d)$.

2) $O =$ איחוד של "כדורים פתוחים".

**תרגיל:** הוכיחו שלכל $(X, top(d))$ מתקיים:

$t_1$) $\emptyset, X \in top(d)$

$t_2$) $O_1, O_2 \in top(d) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in top(d)$ (חיתוך סופי של קבוצות פתוחות גם פתוח)

$t_3$) $\forall i \in I \quad O_i \in top(d) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in top(d)$ (איחוד של קבוצות פתוחות גם פתוח)

**הערה:** $\{t_1, t_2, t_3\}$ "אקסיומות של טופולוגיה" על קבוצה $X$ בצורה אבסטרקטית.

**הערה:** אחד מהמתמטיקאים שהשפיעו על טופולוגיה בצורה מאוד חזקה היה *Felix Hausdorff* . על החיים ומותו הטרגי בתקופת הנאצים בגרמניה ממליץ לקרוא

https://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Hausdorff

**משפט (תכונת Hausdorff):**

נניח $(X, d)$ **מרחב מטרי**. אז לכל 2 נקודות <u>שונות</u> יש סביבות זרות.

**הוכחה:** $a \neq b \overset{m_1}{\Rightarrow} d(a,b) > 0$

ניקח $0 < \epsilon \leq \frac{d(a,b)}{2}$.

אז $B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$ . נבדוק !

אם נניח <u>שלא</u>: $\exists\, x \in B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b)$

$$\begin{cases} d(a,x) < \epsilon \\ d(b,x) \overset{m_2}{=} d(x,b) < \epsilon \end{cases}$$

נחבר: $d(a,b) \underbrace{\leq}_{m_3} d(a,x) + d(x,b) < 2\epsilon$

$\Rightarrow d(a,b) < 2\epsilon$

סתירה לבחירה ☺

**<u>משפט (יחידות הגבול):</u>** במרחב **מטרי** גבול סדרה הוא יחיד (אם קיים).

<u>**הוכחה:**</u> אם נניח בשלילה $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ $a \neq b$

לפי משפט (תכונת Hausdorff) יש סביבות זרות

$B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$

מצד שני, כמעט כל האיברים $x_n$ נמצאים ב - $B_\epsilon(a)$ וגם ב - $B_\epsilon(b)$.

מכאן סתירה ⇐ מש"ל. ☺

**דוגמה נגדית** (במרחב פסאודו-מטרי אין יחידות הגבול)

במרחב פסאודו-מטרי $X = (\mathbb{R}^2, \rho_1)$ עם $\rho_1(x,y) := |x_1 - y_1|$

ניקח את הסדרה $\forall y \in \mathbb{R}$ $x_n = \left(1 + \frac{2}{n}, 7\right) \to (1,y)$

אין יחידות של הגבול! (צריך לשים לב שזאת לא מטריקה).

**תרגיל**: הוכיחו שמרחב פסאו-דומטרי עם יחידות הגבול הוא תמיד מרחב מטרי.

<u>**הערה:**</u>

ב $(X,d)$ מ"פ, $a \in X$, $x_n$ סדרה. התנאים הבאים שקולים:

1) $\lim_{n\to\infty} d(x_n,a) = 0$ $(d(x_n,a) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0)$.

2) $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}, n > N: d(x_n,a) < \epsilon$.

3) בכל $\epsilon$-סביבה של $a$ (ז"א בכל $B(a,\varepsilon)$) נמצאים כמעט כל האיברים של הסדרה.

**4) בכל קבוצה פתוחה $O$ שמכילה את $a$, כמעט כל האיברים נמצאים ב $O$.**

<u>**הגדרה:**</u> ת"ק $A$ במרחב $(X,d)$ נקראת **סגורה** אם המשלים קבוצה פתוחה.

ז"א אם $A^c := X \setminus C \in top(d)$

<u>**למשל:**</u> $B_r[a]$ ("כדור סגור") הוא סגור.

לבדוק ! (יש הוכחה פשוטה גם דרך רציפות פונקציות !)

**טענה:** איחוד **סופי** של קבוצות סגורות סגור. חיתוך של קבוצות סגורות סגור.

רמז: ניתן להוכיח את זה ע"י התכונות של קבוצות פתוחות וחוקי דה-מורגן.

**תרגיל:** הוכיחו שכל נקודון סגור במרחב מטרי (ושזה לא נכון במרחב פסאודו-מטרי).

הסיקו: כל תת קבוצה סופית במרחב מטרי היא סגורה.

**תרגיל:** הוכיחו שכל קבוצה סגורה במרחב מטרי = חיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

## סדרות קושי ומרחב מטרי שלם

**הגדרה:** $(X,d)$ מ"מ. סדרה $x_n \in X, n \in \mathbb{N}$ נקראת **סדרת קושי** $(Cauchy)$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$d(x_i, x_j) < \epsilon$$

$$i, j \geq n_\epsilon$$

**הערה:** אם $x_n$ מתכנסת ב $X$ אז $x_n$ סדרת קושי (לבדוק!).

לכן אם סדרה לא ס"ק אז גם לא מתכנסת.

למשל:

$$e_1 = (1,0,0,0\cdots)$$
$$e_2 = (0,1,0,0\cdots)$$
$$e_3 = (0,0,1,0\cdots)$$
$$\cdots$$

$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ לא מתכנסת כי $\forall i \neq j \quad d(e_i, e_j) = \sqrt{2}$

**הגדרה:** מ"מ $(X,d)$ נקרא **שלם** $(Complete)$ אם לכל סדרת קושי $x_n$ ב $X$ יש גבול ב-$X$.

**הגדרה:** מ"נ $(E, \|\cdot\|)$ נקרא **מרחב בנך** $(Banach\ space)$ אם $(E, d_{\|\cdot\|})$ שלם.

**דוגמאות:**

- $(C[a,b], \|\cdot\|_{\max}), (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\max}), (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|), (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ מרחבי Banach
- $(C[a,b], \|\cdot\|_1), (C[a,b], \|\cdot\|_2)$ **לא** מרחבי Banach

הערה: $\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$

מכפלה פנימית ב - $C[a,b]$ שממנה מקבלים נורמה: $\|f\|_2 \coloneqq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$

הנורמה מגדירה מטריקה $d_2$ על מרחב הפונקציות $C([a,b])$.

- נגדיר $l_\infty \coloneqq \left\{x=(x_1,x_2,\dots)\middle|\|x\|_\infty=\sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i|<\infty\right\}$ מרחב Banach

מרחבה Banach של <u>סדרות **חסומות**</u>.

**<u>הכללה:</u>** מרחב <u>פונקציות חסומות</u> על קבוצה S

$$l_\infty(S) \coloneqq \{f: S\to\mathbb{R} \mid f(S) \text{ חסום ב } \mathbb{R}\}$$

$$\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x\in S}|f(x)|$$

<u>2 מקרים פרטיים:</u>

1) $S=\mathbb{N}$, אז נקבל את $l_\infty(\mathbb{N})=l_\infty$.

2) $S=\{1,2,\dots,n\}$, אז נקבל את $(\mathbb{R}^n,d_{max})$.

**<u>דוגמה:</u>** $X=(\mathbb{Z},d_p)$ מ"מ לא שלם !

נניח עבור $p=3$: $x_n=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}$

סדרת קושי שלא מתכנסת ב $X$ **(פרטים בתרגול).**

**<u>הערה:</u>**

שתי תכונות מאוד חשובות של שלמות:

1) שלמות נשמרת בקבוצות סגורות (אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלמה לגבי מטריקת הצמצום).

2) נניח $(Y,d_Y)$ תת מרחב מטרי של $(X,d)$. אז אם $(Y,d_Y)$ שלם אז $Y$ <u>סגורה</u> ב $X-$.

<u>רמז:</u> <u>תת קבוצה</u> היא סגורה $\Leftrightarrow$ היא "סגורה בנוגע להתכנסות".

## <u>פונקציות רציפות</u>

**<u>הגדרה (רציפות):</u>** נניח $(X,d)$, $(Y,\rho)$ מרחבים. פונקציה $f: X\to Y$ נקראת **רציפה בנקודה** $\boldsymbol{a\in X}$ אם:

$$\boxed{\forall\epsilon>0\;\exists\delta>0: d(a,x)<\delta \Rightarrow \rho\big(f(a),f(x)\big)<\epsilon}$$

$f$ נקראת **רציפה**, כאשר $f$ רציפה בכל נקודה $a\in X$.

נסמן: $f\in C(X,Y)$ . אם $Y=\mathbb{R}$ אז נסמן: $f\in C(X)$.

<u>**הגדרה:**</u> אומרים ש – $f$ **רציפה במידה שווה (במ"ש)** *uniformly continuous*

אם בבחירה של $\delta$ אין תלות ב $a$. ז"א

$$\forall\epsilon>0\;\exists\delta: d(x_1,x_2)<\delta \Rightarrow \rho\big(f(x_1),f(x_2)\big)<\epsilon$$

$$\boxed{f\in UC(X,Y)}$$

<u>**הגדרה:**</u> אומרים ש $f$ מקיימת **תנאי ליפשיץ** $(Lipschitz)$ לגבי המקדם $c>0$ אם:

$$\boxed{\forall x_1,x_2\in X: \rho\big(f(x_1),f(x_2)\big)\le c\cdot d(x_1,x_2)}$$

נסמן $\boxed{f\in Lip_c(X,Y)}$ $\boxed{Lip(X,Y)=\bigcup_{c>0}Lip_c(X,Y)}$

תמיד: $\boxed{Lip(X,Y)\subset UC(X,Y)\subset C(X,Y)}$

<u>**דוגמאות מאנליזה:**</u>

רציפה אבל לא במ"ש $f(x)=x^2\,, f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

רציפה במ"ש אבל לא ליפשיץ $f(x)=\sqrt{x}\,, f:[0,1]\to\mathbb{R}$

<u>**הערה:**</u> כל שיכון איזומטרי פונקצית ליפשיץ עם מקדם 1 (**אבל לא ההפך ! תנו דוגמה**).

<u>**סימון:**</u> אם קיימת איזומטריה, נסמנה $(X,d)\simeq(Y,\rho)$

זהו "יחס שקילות" **באוסף** Metr (מרחבים מטריים).

1) $(X,d)\simeq(X,d)$ (פ' הזהות).

2) $(X,d)\simeq(Y,\rho)\Leftarrow(Y,\rho)\simeq(X,d)$ (פ' הופכית).

3) $\begin{cases}(X_1,d_1)\simeq(X_2,d_2)\\(X_2,d_2)\simeq(X_3,d_3)\end{cases}\Rightarrow(X_1,d_1)\simeq(X_3,d_3)$ (ההרכבה)

**דוגמאות:**

1) **הזזה** במרחב נורמי $T_v(x) = v + x$ $T_v: E \to E$ תמיד איזומטריה (הוכחנו).

תבדקו ש $T_v(B(0_E, r)) = B(v, r)$. לכן $B(v,r) \simeq B(u,r) \quad \forall u,v \in E$.

2) ) $\overset{\|\cdot\|}{\to} [0,\infty)$ $Lip_1(E,\mathbb{R}) \ni f: E$, כאשר $E$ מרחב נורמי.

<u>הסבר:</u> $\big|\|u\| - \|v\|\big| \underbrace{\leq}_{c=1} \|u - v\|$

3) $Lip_1(X,\mathbb{R}) \ni f_A: X \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י: $f_A(x) = d(x, A)$

<u>הסבר:</u> שימוש באי שוויון חשוב $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$

**<u>משפט (עיקרון $Heine$):</u>** נניח $(Y,\rho), (X,d)$ מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f: X \to Y$ התנאים הבאים שקולים:

1) $f$ רציפה.

2) $f$ <u>שומרת על התכנסות</u> (כלומר, $x_n \overset{d}{\to} a \Rightarrow f(x_n) \overset{\rho}{\to} f(a)$).

3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (ז"א $\forall O \in top(\rho): f^{-1}(O) \in top(d)$)

לפני ההוכחה קודם נדון כמה תוצאות.

**<u>משפט (השוואת טופולוגיות):</u>** נניח ש - $d, \rho$ מטריקות על אותה קבוצה $X$. אז התנאים הבאים שקולים:

1) $top(\rho) \subseteq top(d)$.

2) $d$ דומיננטי ביחס ל $\rho$. ז"א $x_n \overset{d}{\to} a \Rightarrow x_n \overset{\rho}{\to} a$

<u>**הוכחה:**</u> נגדיר את "פונקצית הזהות" $x \mapsto x$ $(X,d) \overset{id}{\to} (X,\rho)$

נשתמש במשפט (עיקרון היינה).

כש - $f = id$, אז $f^{-1}(O) = O$. לכן תנאי 3 מעיקרון היינה יהיה –

$$\forall O \in top(\rho): O \in top(d)$$

$$\Rightarrow top(\rho) \subseteq top(d)$$

תנאי 2 בעיקרון היינה נותן לנו ישירות את התנאי השני במשפט שלנו.

■

**תוצאה:** התנאים הבאים שקולים:

1) $top(d) = top(\rho)$.

2) $\rho \sim d$.

הסבר: נובע מיד ! שני כיוונים במשפט הקודם.

**דוגמה:**

1) $X = \mathbb{R}^n$ $\quad$ $top(d_{max}) = top(d) = top(d_1)$

כי $\quad d_{max} \sim d \sim d_1$

2) $X = C[a,b]$ $(a < b)$ $\quad$ $top(d_1) \subsetneq top(d_{max})$

- (מוכל) כי $d_{max}$ דומיננטי ביחס ל - $d_1$: $\quad d_1 \leq (b-a)d_{max}$

לכן לפי משפט ההשוואה נקבל שיש הכלה של הטופולוגיות.

- (לא שווה) כעת, יש **הכלה ממש** כי קיימת סדרה $f_n$ ב - $C[a,b]$ $(a < b)$ וגם סדרה $f$ ב - $C[a,b]$ כך ש $\quad f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} f$ , $f_n \overset{d_1}{\rightarrow} f$

ראינו דוגמה בהרצאה ב - $[0,1]$.

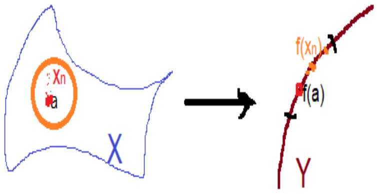
# הרצאה 3

**משפט (עיקרון $Heine$):** נניח $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f: X \to Y$ התנאים הבאים שקולים:

1) $f$ רציפה.

2) $f$ <u>שומרת על התכנסות</u> (כלומר, $x_n \overset{d}{\to} a \Rightarrow f(x_n) \overset{\rho}{\to} f(a)$).

3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (ז"א $\forall O \in top(\rho): f^{-1}(O) \in top(d)$)




**<u>הוכחה:</u>**

<u>$(1) \Leftarrow (2)$:</u>

נתון ש $x_n \overset{d}{\to} a$. צ"ל - $f(x_n) \overset{\rho}{\to} f(a)$.

$f$ רציפה $\Leftarrow$ $f$ רציפה בנקודה $a \in X$.

$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0: f\big(B_\delta(a)\big) \subseteq B_\epsilon\big(f(a)\big)$ (הגדרת $Cauchy$).

לפי הגדרת התכנסות, כמעט כל האיברים של $x_n$ נמצאים בכדור $B_\delta(a)$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: x_n \in B_\delta(a)$$

*אז* כמעט כל האיברים של הסדרה $f(x_n)$ נמצאים ב $\epsilon$ -סביבה: $B_\epsilon\big(f(a)\big)$

לכן הוכחנו: $f(x_n) \overset{\rho}{\to} f(a)$.

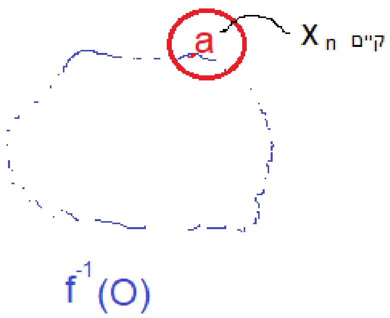
<u>$(2) \Leftarrow (3)$:</u>

נניח בשלילה ש (3) לא מתקיים. ז"א:

$$\exists O \in top(\rho): f^{-1}(O) \notin top(d)$$

כלומר $O$ פתוחה בעוד ש $f^{-1}(O)$ לא פתוחה ב $(X,d)$.

ז"א קיימת נקודה "<u>לא פנימית</u>" $\exists a \in f^{-1}(O): \forall \epsilon > 0\ \ B_\epsilon(a) \nsubseteq f^{-1}(O)$




עבור כל $\frac{1}{n} =: \epsilon$ קיים $x_n \in X$ כך ש

$$\begin{cases} x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \\ x_n \notin f^{-1}(O) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d(a, x_n) < \frac{1}{n} \\ f(x_n) \notin O \end{cases}$$

מהשורה הראשונה נובע ש $d(a, x_n) < \frac{1}{n}$ ולכן - $x_n \xrightarrow{d} a$.

על מנת לקבל סתירה, מספיק להוכיח $f(x_n) \overset{\rho}{\nrightarrow} f(a)$.

$f(a) \in O \in top(\rho)$ וכן $O$ פתוחה ולכן $f(a)$ נקודה פנימית ב $O$.

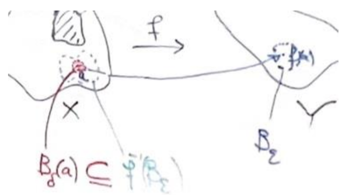
אז קיים $\epsilon > 0$ כך ש $B_\epsilon(f(a)) \subseteq O$

אבל מהשורה השנייה מקודם $f(x_n) \notin O$ ולכן $\forall n: f(x_n) \notin B_\epsilon(f(a))$.

לכן $f(x_n) \overset{\rho}{\nrightarrow} f(a)$.

<u>(3) ⇐ (1):</u>

בודקים את (1) -- רציפות "דרך כדורים".




לכל $\epsilon > 0$ נתון – $O = B_\epsilon(f(a)) \in top(\rho)$ (למדנו שכל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה).

לכן בגלל (3) $f^{-1}(O) = f^{-1}\left(B_\epsilon(f(a))\right) \in top(d)$ גם פתוח.

אכן $a \in f^{-1}(O)$, ולכן $a$ נקודה פנימית, אז קיים $\delta > 0$ כך ש –

$$B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(O)$$

$$\Rightarrow f(B_\delta(a)) \subseteq f(f^{-1}(O)) \subseteq O = B_\epsilon(f(a))$$

**הערה:** במשפט עקרון $Heine$ (3 תנאים) אפשר להוסיף תנאי רביעי על קבוצות סגורות.

**4) מקור של קבוצה סגורה הוא גם סגור.**

הסבר מקוצר: $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$

$A$ סגורה אם ורק אם $A^c$ פתוחה.

ולכן $(4) \Leftrightarrow (3)$.

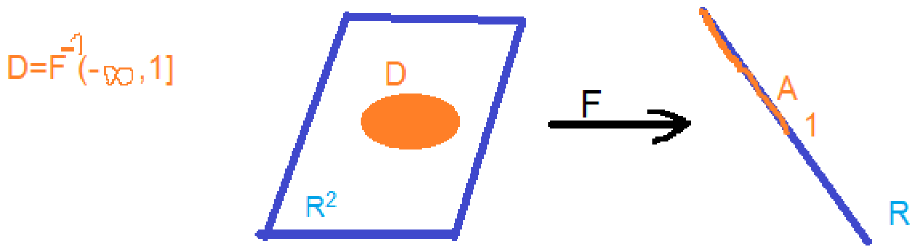
☺

**דוגמאות:**

1) $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\right\}$ סגור ב - $\mathbb{R}^2$.

הסבר: $F(x,y) := \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

רציפה (פונקציה פולינומיאלית!).




2) כל מישור ב - $\mathbb{R}^3$ סגור. למשל

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \underbrace{2x + 3y - 4z + 5}_{F(x,y,z)} = 0\right\}$$

סגור, כי את $D$ ניתן לכתוב כ $D = F^{-1}(0)$ ואז $\{0\}$ סגור ב - $\mathbb{R}$.

3) בכל מ"מ $(X,d)$: $B_r[a]$ $S_r(a)$ סגורות.

הסבר:

נגדיר פו' $f_a: X \to \mathbb{R}$ , $f_a(x) = d(a,x)$. זוהי פונקציית ליפשיץ – $f_a \in Lip_1 \subset C(X)$.

$$f_a^{-1}(-\infty, r] = B_r[a] := \{x \in X | d(a,x) \le r\}$$

גם סגור!

4) $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ מטריצות הפיכות, <u>פתוחה</u> במרחב של מטריצות ריבועיות.

$$Gl_n(\mathbb{R}) \subset Mat_n(\mathbb{R}) \overset{metr}{\simeq} \mathbb{R}^{n^2}$$

**הגדרות:** $(X,d)$ מ"מ, $A \subseteq X$.

א) **"הסגור של $A$"** $(Closure\ of\ A)$:

$$A \underbrace{\subseteq}_{m_1} \bar{A} = cl(A) \coloneqq \{x \in X \mid\ d(x,A) = 0\}$$

ב) **"סגור סדרתי"** $(sequential\ closure)$:

$$A \underbrace{\subseteq}_{\substack{\text{סדרה קבועה} \\ \text{תמיד מתכנסת!}}} scl(A) \coloneqq \left\{x \in X \middle| \exists a_n \in A : x = \lim_{n\to\infty} a_n\right\}$$

הערה: נניח $A \subset \mathbb{R}, \sup A < \infty$. אזי $\sup A \in cl(A)$. דומה לגבי $\inf A$.

**משפט 1:** בכל מ"מ תמיד $\boxed{scl(A) = cl(A)}$.

**הוכחה:** $(\subseteq)$: נניח $z \in scl(A)$ אז

$$\begin{cases} \exists a_n \in A \\ z = \lim_{n\to\infty} a_n \end{cases}$$

$$d(z,a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow d(z,\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 0$$

$$0 \le d(z,A) \le d(z,\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \Rightarrow d(z,A) = 0$$

$$\Rightarrow z \in cl(A)$$

$(\supseteq)$:

$$z \in cl(A)$$

$$\Rightarrow \inf_{a\in A} d(z,a) = d(z,A) = 0$$

(לפי הגדרת $inf$) נקבל שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a_n \in A$ כך ש

$$\forall n \in \mathbb{N}: 0 \le d(z,a_n) \le \frac{1}{\underbrace{n}_{\to 0}}$$

מכאן $a_n \in A \land \lim_{n\to\infty} a_n = z \in scl(A)$

☺

**משפט 2 (קריטריון סגירות במ"מ):** נניח $(X,d)$ מ"מ, $A \subseteq X$. התנאים הבאים שקולים:

1) $A$ סגורה ב $X$ (ז"א משלים לפתוח).

2) $A = scl(A)$ ($A$ סגורה לגבי הגבולות).

3) $A = cl(A)$.

4) $A$ "קבוצת אפסים" של פונ' רציפה (ז"א קיימת פ' רציפה $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ כך ש - $A = f^{-1}(0)$).

**<u>הוכחה:</u>**

<u>$(1) \Leftarrow (2)$:</u>

נניח בשלילה ש - $A \neq scl(A)$.

אז (בגלל ש - $A \subseteq scl(A)$) קיימת נק' –

$$\begin{cases} z \in scl(A) \\ z \notin A \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \lim a_n \ , \exists a_n \in A \\ z \notin A \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \lim a_n \ , \exists a_n \in A \\ z \in A^c \end{cases}$$

$A$ סגורה (נתון). ז"א $A^c$ <u>פתוחה</u>!

ואז $z$ נקודה פנימית של $A^c$.

$$\Rightarrow \exists r > 0 : B_r(z) \subseteq A^c$$

אז אף איבר של הסדרה $a_n$ לא נמצה בכדור $B_r(z)$ וזאת סתירה ל –

$$\begin{cases} z = \lim a_n \\ a_n \in A \end{cases}$$

$(2) \Leftarrow (3)$: בגלל משפט 1.

<u>$(3) \Leftarrow (4)$:</u>

נגדיר $\left(\text{רציפה!}\right)$ $f_A : X \to \mathbb{R}$ $\quad f_A(x) = d(x, A)$

$$f_A^{-1}(0) = \{x \in X | f_A(x) = 0\} = \{x \in X | d(x, A) = 0\} = cl(A) \underbrace{=}_{\text{נתון } 3} A$$

ולכן $f_A^{-1}(0) = A$.

<u>$(4) \Leftarrow (1)$:</u>נפעיל "תוספת למשפט $Heine$" (מקור לסגור גם סגור) $f^{-1}(0)$ מקור של נקודון.

☺

**<u>הגדרה:</u>** במ"מ $(X, d)$ עבור $A \subseteq X$, נגדיר

$$A' \coloneqq \{x \in X | x \in cl(A \backslash \{x\})\} \overset{metr}{=} \{x \in X | x \in scl(A \backslash \{x\})\} \subset cl(A)$$

**נקודות ההצטברות של $A$.**

**<u>תרגיל:</u>** הוכיחו ש $z \in A'$ אם ורק אם קיימת סדרה ב A **עם איברים שונים** שמתכנסת ב X לנקודה z.

<u>רמז:</u> ראו בהרצאה 1 משפט (על נקודה מבודדת) הוכחה של כיוון שני. תשתמשו בעובדה ש

$d(z, A\backslash\{z\}) = 0$ על מנת לבנות סדרה מבוקשת (במקום העובדה בטענה ש z לא מבודדת).

**<u>דוגמאות:</u>**

1) $A = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$.

$$A' = \{0\}$$

$$A'' = \emptyset$$

2) $A = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \middle| n, m \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}^2$.

$$A' = \left\{(0,0), \left(\frac{1}{n}, 0\right), \left(0, \frac{1}{m}\right)\right\}$$

$$A'' = \{(0,0)\}$$

$$A''' = \emptyset$$

3) $A=[0,1] \subset \mathbb{R}$

אז

$$A' = A$$

**<u>תכונות (במ"מ):</u>** (בתירגול או לבדוק לבד!).

א) $cl(A) = A \cup A'$.

ב) $A$ סגורה $\Leftrightarrow A' \subseteq A$

**<u>הגדרה:</u>** אומרים שתת קבוצה $A$ ב- $X$ היא:

א) **"קבוצה $G_\delta$"** אם $A$ שווה לחיתוך **בן מנייה** של קבוצות פתוחות.

(ז"א $\exists O_n \in top(d), n \in \mathbb{N}: A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$).

ב) **"קבוצה $F_\sigma$"** אם $A$ שווה לאיחוד **בן מנייה** של קבוצות סגורות.

(ז"א $\exists P_n \subseteq X: A = \bigcup_{n\in N} P_n$ , $P_n$ סגורה $\forall n$).

**<u>הערה:</u>** $A \in G_\delta \Leftrightarrow A^c \in F_\sigma$

למשל: כל נקודון **קבוצה $G_\delta$** וגם $F_\sigma$ **(מדוע ?)** בכל מ"מ

**<u>תרגיל:</u>**

"בעזרת פונקציה רציפה" הוכיחו שבמרחב מטרי $(X,d)$:

א) כל קבוצה סגורה היא $G_\delta$.

ב) כל קבוצה פתוחה היא $F_\sigma$

**__הגדרה:__** $A$ נקראת קבוצה **סגוחה** (clopen) אם $\begin{cases} A \text{ פתוחה} \\ A \text{ סגורה} \end{cases}$

**__דוגמאות:__**

1) $A=(0,1)$ פתוחה ולא סגורה ב $X=\mathbb{R}$.

2) $A=[0,1]$ סגורה ולא פתוחה ב $X=\mathbb{R}$.

3) $A=[0,1)$ לא סגורה ולא פתוחה ב $X=\mathbb{R}$.

4) $\mathbb{R},\emptyset$ סגוחות ב - $\mathbb{R}$.

**__הערה:__** לכל מרחב $(X,d)$ – תת קבוצות $\emptyset,X$ תמיד סגוחות (כי $X=\emptyset^c$, $\emptyset=X^c$).

השאלה: מתי יש סגוחות נוספות לא טריוויליות ?

**__הגדרה:__** מרחב $(X,d)$ נקרא **קשיר** (*connected*) אם קבוצות סגוחות במרחב הן **רק** $\emptyset,X$.

__הגדרה שקולה להיות **לא קשיר**:__ אם קיים פירוק $X=X_1\dot{\cup}X_2$ כך ש –

$$\begin{cases} X_1\neq\emptyset\,,X_2\neq\emptyset \\ X_1,X_2\in top(d)\ (\text{פתוחות}) \\ X_1\cap X_2=\emptyset \end{cases}$$

(שימו לב ש $X_1,X_2$ __סגוחות__ לא טריוויאליות)

**__למשל:__** אם: $\mathbb{R}\supset \underbrace{X}_{\text{כתת מרחב}}=[2,4)\cup(5,\infty)$

אז $X$ **לא קשיר**. שימו לב ש $(5,\infty)$ **סגוחה** ב $X$ (לא ב $\mathbb{R}$).

דומה עבור $[2,4)$ (למשל 2 נק' פנימית ב $[2,4)$ כי $B_{\frac{1}{2}}(2)=[2,2.5)\subseteq[2,4)$).

**__עוד דוגמה:__** מרחב מטרי של רציונליים $\mathbb{Q}$ (כתת מרחב בממשיים) לא קשיר.

יש אינסוף ת"ק סגוחות ובהתאם יש אינסוף "פירוקים טופולוגיים". למשל:

$$\mathbb{R}\supset\mathbb{Q}$$

$$X_1=\left(-\infty,\sqrt{2}\right)\cap\mathbb{Q}$$

$$X_2=\mathbb{Q}\cap\left(\sqrt{2},\infty\right)$$

**__תרגיל:__** הוכיחו שמרחב $(\mathbb{Z},d_p)$ (עם מטריקה $p$ –אדית) כל כדור פתוח קבוצה סגוחה.

הסיקו ש $(\mathbb{Z},d_p)$ לא קשיר.

**משפט:** (*תכונות בסיסיות של מרחב מטרי שלם*)

1. שלמות נשמרת בקבוצות סגורות

(אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלם כתת מ"מ).

2. נניח $(Y,d_Y)$ תת מרחב מטרי של $(X,d)$. אז אם $(Y,d_Y)$ שלם אז $Y$ סגורה ב $X$.

הוכחה: בתירגול

## השלמה של מרחב מטרי

הגדרה: **השלמה** של מ"מ $(X,d)$ הוא

שיכון איזומטרי $M \overset{i}{\hookrightarrow} (X,d)$, כאשר $M$ **מ"מ שלם** ומתקיים: $cl(i(X)) = M$ .

**הערה:**

קל לבדוק שהסגור $cl(A)$ של $A$ בכל מרחב הוא תמיד קבוצה סגורה.

(וזה נכון אפילו למרחבים טופולוגיים, נוכיח בהמשך)

**משפט (שיכון למרחב $\boldsymbol{Banach}$):** לכל מ"מ $(X,d)$ קיים שיכון איזומטרי לתוך מרחב Banach.

הוכחה: למדנו על מרחב $\left(l_\infty(X), \|\cdot\|_{sup}\right) \in Banach$.

$$l_\infty(X) = \left\{f: X \to \mathbb{R} \middle| \text{חסומה } f(X)\right\}$$

$$\|f\|_{sup} \coloneqq \sup_{x\in X}|f(x)|$$

נראה כי ניתן לשכן את $X$ לתוך $l_\infty(X)$:

נבחר $z \in X$. ונגדיר – $\varphi: X \to l_\infty(X)$

$$a \longmapsto \varphi(a) = \hat{a} \qquad \hat{a}: X \to \mathbb{R} \quad \boxed{\hat{a}(x) = d(a,x) - d(z,x)}$$

$\hat{a} \in l_\infty(X)$, ז"א $\hat{a}$ פונקציה חסומה כי

$$|\hat{a}(x)| = |d(a,x) - d(z,x)| \le \underbrace{d(a,z)}_{\text{קבוע}}$$

מ"ל $\forall a,b \in X: \boxed{d(a,b) = \|\hat{a} - \hat{b}\|}$ .

$$\|\hat{a} - \hat{b}\| = \sup_{x\in X}\left|\big(d(a,x) - d(z,x)\big) - \big(d(b,x) - d(z,x)\big)\right| =$$

$$= \sup_{x\in X}|d(a,x) - d(b,x)| \le d(a,b)$$

מצד שני, אם נציב $x = b$ נקבל

$$\|\hat{a} - \hat{b}\| = \sup_{x\in X}|d(a,x) - d(b,x)| \ge \quad |d(a,b) - 0| = d(a,b)$$

☺

# הרצאה 4

**משפט (השלמה):** לכל מ"מ $(X,d)$ יש השלמה.

**הסבר ב 2 דרכים:**

<u>דרך I:</u> הוכחנו שלכל $(X,d)$ קיים שיכון איזומטרי לתוך מרחב $Banach$

$$\varphi: X \to l_\infty(X)$$

$l_\infty(X)$ פונקציות חסומות וממשיות. ( $\left(l_\infty(X), \|\cdot\|_{sup}\right)$ מרחב $Banach$).

$$\overline{\varphi(X)} \subset l_\infty(X)$$

קבוצה סגורה במרחב שלם ולכן גם שלם.

אז קיבלנו השלמה $X \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \overline{\varphi(X)} = cl(\varphi(X))$

☺

<u>דרך II:</u> "דרך סדרות קושי" (הוכחה מקוצרת - רק שלבים בסיסיים). הוכחה מפורטת אפשר למצוא למשל בספר "טופולוגיה קבוצתית",ד. ליבוביץ (האוניברסיטה הפתוחה) חלק א.

הרעיון מאוד דומה להשלמה $\mathbb{Q} \overset{i}{\hookrightarrow} \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ של מרחב רציונליים. כשאנחנו מגדירים מספר ממשי כמחלקת שקילות של סדרות קושי ברציונליים.

<u>שלב א':</u> עבור מ"מ נתון $(X,d)$ נגדיר קבוצה – $\tilde{X} := \{(X,d)$ סדרות קושי ב$\}$

נגדיר פסאודו-מטריקה באופן טבעי: לכל זוג של ס"ק $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$

נגדיר $$\tilde{d}(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

הגבול קיים כי מדובר על סדרות קושי וקל לבדוק ש $d(x_n,y_n)$ ס"ק ב $\mathbb{R}$

(רמז: שימו לב $|d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| \le d(x_n,x_m) + d(y_m,y_n)$).

לכן הסדרה $d(x_n,y_n)$ באמת מתכנסת ב $\mathbb{R}$ כי $\mathbb{R}$ שלם.

$(\tilde{X},\tilde{d})$ מרחב פסאודו-מטרי.

<u>שלב ב':</u>

**<u>טענת עזר</u>**: (*מרחב מטרי מושרה ע"י מרחב פסאודו-מטרי*)

נניח $(\tilde{X},\tilde{d})$ מרחב פסאודו-מטרי (כללי).

יוצרים ממנו מרחב מטרי מנה שמקבלים באופן הבא.

על מרחב פסאודו-מטרי $(\tilde{X},\tilde{d})$ מגדירים יחס שקילות ("מרחק אפס"):

$$x\Omega y \overset{def}{=} \tilde{d}(x,y)=0$$

נקבל קבוצת מנה: $M:=\tilde{X}/\Omega=\{[x] \text{ מחלקות שקילות}\}$

$$[x]:=\{y\in\tilde{X}|\tilde{d}(x,y)=0\}$$

נגדיר ב $M$ מרחק טבעי (דרך הנציגים): $\bar{d}([x],[y])=\tilde{d}(x,y)$.

אין תלות בנציגים וזאת באמת מטריקה. אז: $(\mathrm{M},\bar{d})$ מרחב מטרי,

הפונקציה $(\tilde{X},\tilde{d})\to(\mathrm{M},\bar{d}),\ x\mapsto[x]$ היא על ושומרת מרחקים.

**נחזור למשפט**. נפעיל "טענת עזר" על מרחב פסאודו-מטרי שלנו $(\tilde{X},\tilde{d})$ של ס"ק.

נגדיר שיכון: $x\mapsto[\tilde{x}] \qquad X\overset{i}{\hookrightarrow}M$

כאשר $\tilde{x}\in\tilde{X}$ סדרה קבועה $x,x,x\ldots$. אז מתקיימים תנאים הבאים:

$i$ שיכון איזומטרי.

$d(x,y)=\bar{d}([\tilde{x}],[\tilde{y}])$

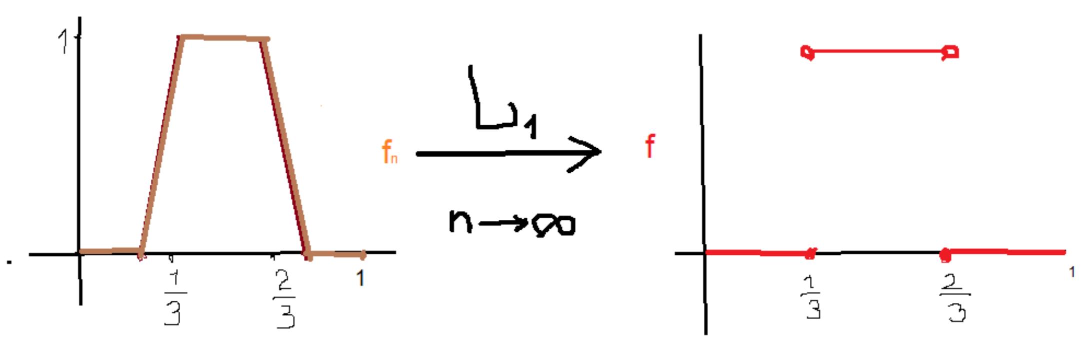
$\overline{\iota(X)}=M$

$(M,\rho)$ מרחב שלם. ☺

**__דוגמה 1:__** $\mathbb{Q}^n\hookrightarrow\mathbb{R}^n=\overline{\mathbb{Q}^n}$.

**__דוגמה 2:__** $L_1[a,b] \underset{\text{השלמה}}{\hookleftarrow} (C[a,b],d_1)$, כאשר $L_1[a,b]$ פונקציות אינטגרביליות.

$(C[a,b],d_1)$ לא שלם!




$(f_n)$ ס"ק ב - $(C[a,b],d_1)$ אבל לא מתכנסת ב - $(C[a,b],d_1)$.

כן מתכנס במרחב (גדול יותר) $L_1[a,b]$:

כאשר: $E=\left\{f \,\middle|\, \int_a^b |f|dx=0\right\}$.

$\widetilde{L_1}$ מרחב פסאודו-נורמי ! (אומרים יותר: סמי-נורמי). $L_1[a,b]=\widetilde{L_1}/E$ מרחב המנה והוא מרחב בנך של פונקציות אינטגרביליות על $[a,b]$.

3) $L_2[a,b] \underset{\text{השלמה}}{\hookleftarrow} (C[a,b],d_2)$. מקבלים מרחב הילברט פונקציונלי.

**__תזכורת:__** $X=(\mathbb{Z},d_p)$ מ"מ לא שלם! (היה בתירגול)

למשל עבור $p=3$: $x_n=1+3+3^2+\dots+3^{n-1}$

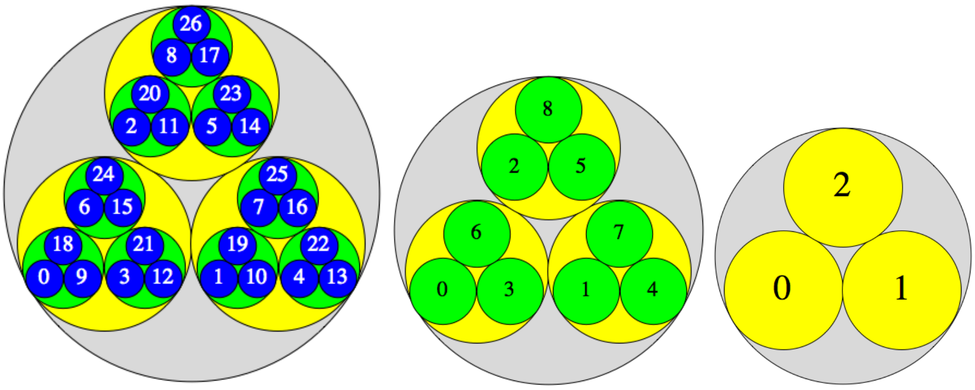
סדרת קושי שלא מתכנסת ב $X$.

**דוגמה 4:** $(\mathbb{Z},d_p)\hookrightarrow(\overline{\mathbb{Z}},\overline{d_p})$ כאשר: השלמה היא

$$\overline{\mathbb{Z}}=\{p-\text{שלמים אדיים}\}=\left\{\sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k\,,b_k\in\underbrace{\{0,1,\dots,p-1\}}_{p\text{ שאריות מודולו}}=\mathbb{Z}_p\right\}$$

שהוא קומפקטי (ולכן גם שלם) ! בעצם זאת חבורה טופולוגית קומפקטית.

__שאלה__: כיצד אפשר לדמיין את האיברים של ההשלמה $(\overline{\mathbb{Z}},\overline{d_3})$ לפי התמונות הבאות ?




........................

# מרחבים טופולוגיים

**הגדרה:** תהי $X$ קבוצה לא ריקה. אוסף תת הקבוצות $\tau \subseteq P(X) \coloneqq \{A | A \subseteq X\}$ נקרא **טופולוגיה על קבוצה $X$** אם מתקיימים התנאים הבאים:

$t_1$) $\emptyset, X \in \tau$.

$t_2$) (חיתוכים סופיים) $O_i \in \tau$ עבור $i \in \{1,2,\dots,n\}$ $\Leftarrow$ $O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_n \in \tau$

(מספיק עבור $n = 2$).

$t_3$) (איחודים) $O_i \in \tau$ עבור $i \in I$ $\Leftarrow$ $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$.

אם מתקיימים הנ"ל, אז נאמר ש - $(X, \tau)$ הוא **מרחב טופולוגי** $(Topological\ space)$ ונרשום בקיצור מ"ט.

**הגדרות נוספות:**

א) אומרים ש - $A \subseteq X$ היא תת קבוצה **פתוחה** (במ"ט $(X,\tau)$) אם

$$\boxed{A \in \tau \overset{def}{=} \text{פתוחה } A}$$

ב) תת קבוצה $A \subseteq X$ נקראת קב' **סגורה** (במ"ט $(X,\tau)$) אם המשלים קבוצה פתוחה, ז"א

$$\boxed{A^c \text{ פתוחה} \overset{def}{=} \text{סגורה } A}$$

**דוגמאות:**

1) לכל מרחב פסאודו-מטרי $(X,d)$: $\big(X, top(d)\big)$ מרחב טופולוגי (לבדוק!).

כאשר $top(d) = \big\{\text{קבוצות פתוחות במובן } d\big\}$.

**הגדרה:** אומרים שמ"ט $(X,\tau)$ הוא **מטריזבילי** אם קיימת מטריקה $d$ כך ש $\boxed{\tau = top(d)}$

באופן דומה אפשר להגדיר: מרחב טופולוגי **פסאודו-מטריזבילי**

**משפט (תכונות בסיסיות של קבוצות סגורות):** לכל מ"ט $(X,\tau)$ מתקיים:

$t_1^c$) $X, \emptyset$ סגורות.

$t_2^c$) איחוד סופי של קבוצות סגורות הוא סגור.

$t_3^c$) כל חיתוך קב' סגורות שוב סגור.

**הוכחה:** כללי $de\ Morgan$ $\wedge$ הגדרת $TOP$.

**הגדרה:** **קבוצה סגוחה** = סגורה+פתוחה.

2) "טופולוגיה טריוויאלית": $\tau_{tr} := \{\emptyset, X\}$. $(X,\tau_{tr})$ **מרחב טריוויאלי**.

הערה: מ"ט $(X,\tau_{tr})$ תמיד פסאודו-מטריזבילי: כי $\tau_{tr} = top(d_0)$. כאשר $d_0(x,y)=0$.

3) "**טופולוגיה דיסקרטית**": $\tau_{discr} := P(X) = \{X - \text{תת קבוצות ב}\}$

(כאן כל תת קבוצה היא פתוחה, בעצם סגוחה)

שימו לב: בין היתר, כל נקודון $\{x\}$ קבוצה פתוחה (שקול לדיסקרטיות בגלל $t_3$).

**הגדרה:** נקודה $a$ במרחב טופולוגי $(X,\tau)$ נקראת **מבודדת** $(isolated)$ אם $\{a\}\in\tau$

(נקודון פתוח!).

לכן: מרחב טופולוגי הוא דיסקרטי $\Leftrightarrow$ כל נקודה מבודדת בו.

**הערה:** מרחב דיסקרטי הוא תמיד מטריזבילי. $\tau_{discr} = top(d_\Delta)$ ($d_\Delta$ מטריקת 0-1).

**הערה:** לכל טופולוגיה $\tau$ מתקיים: $\{\emptyset, X\} = \tau_{tr} \subseteq \tau \subseteq \tau_{discr} = P(X)$

**הגדרה:** נניח $\tau_1 \subseteq \tau_2$ 2 טופולוגיות על אותה קבוצה $X$. אז אומרים ש - $\tau_2$ **חזקה** יותר מ - $\tau_1$, ואומרים ש - $\tau_1$ **חלשה** יותר מ - $\tau_2$.

4) $X=\{0,1\}$ ונגדיר – $\tau_* := \{\emptyset,\{0\},\{0,1\}\}$ טופולוגית Sierpinski

$\{0\}$ מבודדת, $\{1\}$ לא. מה הן קבוצות סגורות ? סגוחות ?

**הגדרה (תת מרחב טופולוגי):** יהי $(X,\tau)\in TOP$ , $\emptyset\neq Y\subseteq X$.

מגדירים **טופולוגית תת מרחב** מעל $Y$: $\tau_Y := \{O\cap Y | O\in\tau\}$

תבדקו ש $(Y,\tau_Y)\in TOP$

**הערה:** $\{metric\ spaces\} = Metr \to TOP = \{topological\ spaces\},\ (X,d)\mapsto (X,top(d))$

א) לא על.

ב) לא חח"ע.

הסבר ב': (שקילות טופולוגית של מטריקות)

הסבר א': שקול להגיד: שלא כל מ"ט הוא מטריזבילי.

**<u>דוגמה:</u>**

- מ"ט טריוויאלי $(X,\tau_{tr})$ עם $X$ לא נקודון--- לא מטריזבילי (אבל פסאודו-מטריזבילי).
- $X \coloneqq \{0,1\}$. $(X,\tau_*)$ מ"ט אבל לא מטריזבילי (אפילו לא פסאודו-מטריזבילי!).

$$\tau_* = \left\{\underbrace{\emptyset,\{0\},\{0,1\}}_{\text{פתוחות}}\right\}. \qquad \left\{\underbrace{\{0,1\},\{1\},\emptyset}_{\text{סגורות}}\right\}$$

<u>הסבר:</u>

<u>הסבר קצר שהמרחב לא מטריזבילי:</u> $(\{0,1\},\tau_*) \notin Metriz$

נקודון $\{0\}$ לא קבוצה סגורה! מצד שני, בכל מ"מ, כל נקודון סגור!

נוכיח יותר: ש - $(\{0,1\},\tau_*)$ לא פסאודו-מטריזבילי. נניח בשלילה שכן ...

נניח בשלילה שיש פסאודו-מטריקה $\rho$ על $\{0,1\}$ כך ש – $top(\rho)=\tau_*$.

<u>2 מקרים:</u>

1) $\rho(0,1)=0$ ואז $\rho=d_0$. מצד שני, $\tau_* \neq top(d_0)=\{\emptyset,\{0,1\}\}$.

2) $\rho(0,1)>0$. כאן – $\tau_* \subsetneq top(\rho)=\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$

כי כל הנק' מבודדות ולכן המרחב הוא דיסקרטי.

5) "טופולוגיה קו-סופית":

לכל קב' $X \neq \emptyset$ נגדיר – $\tau_{cof} \coloneqq \{F^c : \text{סופית } F \subseteq X\} \cup \{\emptyset\}$

שאלה: מה הן קבוצות סגורות ? סגוחות ?

לבדוק: $(X,\tau_{cof})$ מ"ט אבל לא תמיד מטריזבילי (תלוי בעוצמה של X).

$(\mathbb{R},\tau_{cof})=\{F^c \subseteq \mathbb{R} \mid \text{סופית } F \subset \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \notin Metriz$

<u>רמז:</u> לנקודות שונות אין "סביבות" פתוחות זרות.

**<u>הגדרות:</u>**

יהי $(X,\tau)$ מ"ט.

1) תת קבוצה $V \subseteq X$ נקראת **סביבה לנק' $a \in X$** אם קיימת קבוצה פתוחה $O$ ($\in \tau$)

כך ש $a \in O \subseteq V$.

נסמן $V \in N(a)$, כאשר $N(a)$ סביבות של $a$.

אומרים **סביבה פתוחה** אם $V$ פתוחה.

<u>אזהרה:</u> <u>סביבה</u> לא חייבת להיות פתוחה.

2) באופן דומה נגדיר **סביבה $V$ לתת קבוצה $S \subseteq X$** אם

$$\exists O \in \tau: \quad S \subseteq O \subseteq V$$

נסמן $V \in N(S)$, כאשר $N(aS)$ סביבות של $A$.

3) אומרים שנקודה $a$ היא **נק' פנימית** של קבוצה $A \subseteq X$ אם $A \in N(a)$.

הסימון: $a \in int(A)$ או $a \in A^{\circ}$.

בעצם זה מגדיר את ה"פנים" של $A$: $int(A)$ (כאוסף של נקודות פנימיות).

**<u>הערה:</u>** תמיד $int(A) \subseteq A$.

**<u>טענה:</u>** $int(A) = A \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{קריטריון לפתיחות}} A$ פתוחה $(A \in \tau)$.

הסבר: שימוש ב $t_3$ $\quad A = \bigcup_{a \in A} O_a \in \tau$ ...

**הערה חשובה:** הרבה הגדרות במ"ט מתקבלות מהגדרות על מ"מ כשמחליפים $\varepsilon$-סביבות בסביבות. למשל: התכנסות סדרות, רציפות פונקציות, ...

**<u>הגדרה:</u>** **התכנסות סדרות**

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f} X \quad n \longmapsto f(n) = x_n$$

לסדרה $x_n$ במ"ט $(X, \tau)$ מגדירים גבול (אם קיים!) באופן הבא:

אומרים ש - $a \in X$ **גבול** של סדרה $x_n \in X$ אם לכל סביבה (פתוחה) $U$ של $a$ כמעט כל האיברים נמצאים בסביבה $U$. ז"א

$$\forall U \in N(a)\, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U \qquad (n_0 \text{ תלוי בסביבה } U)$$

**<u>סימון:</u>** $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ או $x_n \xrightarrow{\tau} a$.

**<u>הגדרה:</u>** **רציפות פונקציות**

נייח $(X,\tau),(Y,\sigma)$ מ"ט. פונקציה $f: X \to Y$ נקראת *רציפה בנקודה* $a \in X$ אם:

$$\forall U \in N(f(a)) \quad \exists V \in N(a) \quad f(V) \subseteq U$$

אומרים *רציפה* אם היא רציפה בכל נקודה $a \in X$. סימון: $f \in C(X,Y)$.

**<u>הערה:</u>** (כמו במ"מ) פונקציה $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ בין 2 מ"ט **רציפה** אם"ם

$$\boxed{\forall O \in \sigma: f^{-1}(O) \in \tau}$$

ז"א מקור לפתוח הוא פתוח (ניתן לנסח עבור סגור).

תרגיל: הוכיחו ש $f: X \to Y$ רציפה בכל נקודה $a \in X$ אם"ם $f^{-1}(O) \in \tau \quad \forall O \in \sigma$.

**<u>הגדרה:</u>** $X$ מקיימת **תכונת Hausdorff** (סימון נוסף: תכונת $T_2$), כלומר: $X \in T_2$

אם לכל 2 נקודות שונות יש סביבות $\underbrace{\text{(פתוחות)}}_{\text{בה"כ}}$ זרות.

**<u>משפט:</u>** (יחידות הגבול) במרחב טופולוגי $(X,\tau)$ עם תכונה $T_2$ $(Hausdorff)$, גבול של סדרה תמיד יחיד, אם קיים.

**<u>הוכחה:</u>** נניח בשלילה ש $\begin{cases} a \neq b \\ X \in T_2 \end{cases}$

$\Leftarrow$ קיימות <u>סביבות זרות</u> $U \in N(a), V \in N(b)$ כך ש - $U \cap V = \emptyset$.

$U$ מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה $x_n$, <u>וגם</u> $V$ מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה ...

סתירה! ☺

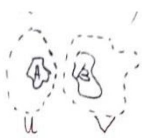
## <u>אקסיומות הפרדה נוספות</u>:

**<u>הגדרות:</u>** נניח $A \subseteq X$, $B \subseteq X$. אומרים:

א) קיימת **הפרדה סביבתית** של $A,B$ (במ"ט $(X,\tau)$) אם

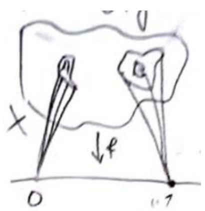
$$\exists\, U \in N(A), V \in N(B): U \cap V = \emptyset$$

(ז"א אם קיימות סביבות $\underbrace{\text{(פתוחות)}}_{\text{בה"כ}}$ זרות).



ב) קיימת **הפרדה פונקציונלית** במובן $Urysohn$ אם:

$$\exists f \in C(X,[0,1]): f(A) = 0, f(B) = 1$$



**<u>טענה:</u>** מהפרדה פונקציונלית נובעת מהפרדה סביבתית.

**<u>הוכחה:</u>** ניקח סביבות פתוחות זרות של $0,1$ ב - $[0,1]$.

$$\underbrace{U := \left[0,\frac{1}{3}\right)}_{0\in} \cap \underbrace{V := \left(\frac{2}{3},1\right]}_{1\in} = \emptyset$$

$$\underbrace{f^{-1}(U)}_{\in N(A)} \cap \underbrace{f^{-1}(V)}_{\in N(B)} = \emptyset$$

ומצאנו הפרדה סביבתית של $A,B$ . ☺

**הגדרה:** $X$ מקיימת **תכונת $T_0$**, כלומר: $(X,\tau)\in T_0$ $(Kolmogorov)$ – אם לכל 2 נקודות שונות $a\neq b$ מתקיים לפחות אחד מהתנאים הבאים:

1) $\exists U\in N(a): b\notin U$

**או**

2) $\exists V\in N(B): a\notin V$

**הגדרה:** $X$ מקיימת **תכונת $T_1$**,

כלומר: $X\in T_1$ אם מתקיימים שתי התנאים מקודם ( (1) **וגם** (2) ).

**תרגיל:** התנאים הבאים שקולים:

1) $X\in T_1$

2) כל נקודון סגור.

3) כל תת קבוצה סופית $F$ היא סגורה. ( רמז: $(t_2^c)$)

**הערה:** תמיד $(X,\tau_{cof})\in T_1$ , בעצם $\tau_{cof}$ טופולוגיה הכי קטנה על $X$ שמקיימת את תכונה $T_1$.

**הגדרה (תזכורת):** $X$ מקיימת **תכונת Hausdorff** (סימון נוסף: תכונת $T_2$),

אם לכל 2 נקודות שונות יש סביבות $\underbrace{\text{(פתוחות)}}_{\text{בה"כ}}$ זרות.

**הגדרה:** $X$ מקיימת **תכונת $T_3$**, כלומר: $X\in T_3$, אם מתקיימים שני תנאים:

(א) $X\in T_1$.

(ב) לכל נק' $a$ ולכל קבוצה סגורה $B$ $a\notin B$ יש הפרדה סביבתית. רמז: ניקח נקודון $B:=\{b\}$

אומרים גם: $Regular\ spaces = T_3$ (ולעיתים רק תנאי $Regular = T_3(\text{ב})$ )

**הערה:** $T_3\subset T_2\subset T_1\subset T_0$

**הגדרה:** $X$ מקיימת **תכונת $T_{3\frac{1}{2}}$**, כלומר: $X\in T_{3\frac{1}{2}}$, אם:

(א) $X \in T_1$.

$(ב)^f$ לכל נק' $a$ ולכל קבוצה סגורה $B$ $a \notin B$ קיימת הפרדה פונקציונלית.

**הערות:**

- מהטענה ⇐ $T_3 \supset T_{3\frac{1}{2}}$.
- $T_{3\frac{1}{2}}$ אומרים גם תכונת Tychonoff או *רגולרי לחלוטין*

*(לעיתים רק על $T_{3\frac{1}{2}}(ב)^f$ אומרים – Completely Regular = רגולרי לחלוטין).*

**הגדרה:** $X$ מקיימת **תכונת $T_4$**, כלומר: $X \in T_4$, אם:

(א) $X \in T_1$.

(ב) לכל 2 קבוצות סגורות וזרות $A \cap B = \emptyset$, יש סביבות (פתוחות) זרות.

(כלומר $\exists\, U \in N(A), \exists\, V \in N(B) : U \cap V = \emptyset$).

**הערות:**

- לעיתים אומרים $Normal\ Space$ = מרחב נורמלי.

(ולעיתים אומרים נורמלי על $T_4(ב)$ בלבד)

- לא קל להבין מדוע $X \in T_4 \Rightarrow X \in T_{3\frac{1}{2}}$

נובע מהמשפט הבא:

***משפט Urysohn:*** יהי $X \in T_4$ . אז לכל זוג $A, B$ קבוצות סגורות זרות קיימת הפרדה פונקציונלית של $A, B$.

החלק הלא טריוויאלי בהוכחה נובע מ "$Onion\ Argument$" $of\ Urysohn$.

$$TOP \supset T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset T_{3\frac{1}{2}} \supset T_4 \supset Metriz$$

**Spoiler** : בהמשך נוכיח $T_4 \supset Metriz$ , $T_4 \supset Comp \cap T_2$ , וגם את משפט Urysohn.

**הערה:** לכל ההכלות הנ"ל, יש דוגמאות נגדיות (הן הכלות **ממש**).

ראו קובץ באתר של המרצה – [some examples]

1) $(\{0,1\}, \tau_{tr}) \in Top$
$(\{0,1\}, \tau_{tr}) \notin T_0$

2) $(\{0,1\}, \tau_*) \in T_0$ ( כי $1 \notin \{0\} \in N(0)$)

$(\{0,1\}, \tau_*) \notin T_1$ (כי $\{0\}$ לא סגור)

3) $(\mathbb{R}, \tau_{cof}) \in T_1$ (כל נקודון $\{a\}$ סגור כי $X \setminus \{a\} \in \tau_{cof}$ )

$(\mathbb{R}, \tau_{cof}) \notin T_2$

תזכורת: $\tau_{cof} := \left\{F^c \middle| \text{סופית } F \subseteq \mathbb{R}\right\} \cup \{\emptyset\}$

**<u>הערה</u>:** $(X,\tau_{cof}) \notin T_2$ לכל $X$ <u>אינסופית</u>.

בעצם זה לכל 2 קבוצות פתוחות לא ריקות.

$U,V \in \tau_{cof}$ מתקיים $U \cap V \neq \emptyset$ כי $U := F_1^c, V := F_2^c$

ולכן $U \cap V = F_1^c \cap F_2^c = (F_1 \cup F_2)^c \underbrace{=}_{\text{אם נניח}} \emptyset$

אז $X = \underbrace{F_1 \cup F_2}_{\text{סופית}}$

בסתירה! ☺

**<u>הגדרה</u>:** הסגור - ***closure***: עבור $A \subseteq X$ נגדיר


$$z \in cl(A) = \bar{A} \overset{def}{=} \forall V \in N(z): V \cap A \neq \emptyset$$

$cl(A)$ "הנקודות הכי קרובות" ל $A$.

**<u>הערה</u>:** תמיד $A \subseteq cl(A)$.

**<u>תרגיל</u>:** $A = cl(A) \Leftrightarrow A$ סגורה .

**<u>הגדרה</u>:** $A \subseteq X$. נגדיר את **הסגור הסדרתי** לפי:

$$z \in scl(A) \overset{def}{=} \exists a_n \in A: a_n \xrightarrow{\tau} z$$

**<u>טענה</u>:** במ"ט תמיד $A \subseteq scl(A) \subseteq cl(A)$ .

**<u>הוכחה</u>:** הכלה ראשונה נובעת מזה שסדרות קבועות תמיד מתכנסות.

נניח $z \in scl(A)$ . אז קיימת סדרה $a_n \in A$ שמתכנסת (במרחב $X$ ) ל $z$ .

לכל סביבה $U \in N(z)$ כמעט כל האיברים של $a_n$ נמצאים ב $U$. אז ברור $U \cap A \neq \emptyset$

לכן $z \in cl(A)$ . זה מוכיח $scl(A) \subseteq cl(A)$.

☺

# הרצאה 5

שאלה: א. למצוא מ"ט $(X,\tau)$ שבו לא תמיד $scl(\mathrm{A})=cl(\mathrm{A})$
(ואז $(X,\tau)$ לא מטריזבילי).
ב. אותה שאלה אבל בתנאי נוסף ש $(X,\tau)\in T_2$.

**דוגמה א:** $(\mathbb{R},\tau_{coc})$ $\tau_{coc}:=\{Y^c\subseteq\mathbb{R}:|Y|\le\aleph_0\}\cup\{\varnothing\}$
$[0,1]=scl([0,1])\neq cl([0,1])=\mathbb{R}$.

**דוגמה ב:** נגדיר $X:=\mathbb{R}\cup\{p\}\,,p\notin$

$$\tau:=\{O\subseteq X\,\big|\,p\in O\Rightarrow|O^c|\le\aleph_0\}$$


ז"א אם $p\in O$, אז המשלים $O^c$ הוא בן מנייה. נשים לב ש - $\forall x\neq p:\{x\}\in\tau$.

לבדוק:

- $(X,\tau)\in TOP$ . לבדוק גם $T_2$.
- $\tau$ לא דיסקרטית (נק' $p$ לא מבודדת).
- תת מרחב טופולוגי $Y:=(\mathbb{R},\tau_Y)$ של מ"ט הנ"ל
  הוא $\mathbb{R}$ עם טופולוגיה <u>דיסקרטית</u>. ז"א $\tau_Y=P(\mathbb{R})=\tau_{discr}$.
- לבדוק $\mathbb{R}=scl(\mathbb{R})\neq \mathrm{cl}(\mathbb{R})=\mathrm{X}$
- אם סדרה $a_n$ מתכנסת ב $(X,\tau)$ אז היא קבועה לבסוף
- $id:(X,\tau)\to(X,\tau_{discr})$ שומרת על התכנסות סדרות אבל לא רציפה !
- **מסקנה: עיקרון *Heine* כאן לא מתקיים!**
- $(X,\tau)\notin Metriz$.

## תכונות $(int, cl, \partial)$, סביבות: במ"ט $(X,\tau)$

1) $\forall a \in X: X \in N(a)$ (רמז: $t_1$).

2) חיתוך **סופי** של סביבות (פתוחות) גם סביבה (פתוחה). רמז: $t_2$.

3) $V \in N(a) \Leftarrow \begin{cases} U \in N(a) \\ V \supseteq U \end{cases}$

4) $\boxed{\underbrace{int(A)}_{A^\circ} \subseteq A \subseteq \underbrace{cl(A)}_{\bar{A}}}$.

5) לכל $A_1 \subseteq A_2$ מתקיים:

$int(A_1) \subseteq int(A_2)$

$cl(A_1) \subseteq cl(A_2)$

$scl(A_1) \subseteq scl(A_2)$

6) קריטריון לפתיחות : $\boxed{A \text{ פתוחה } \Leftrightarrow int(A) = A}$

רמז: $t_3$. $A = \bigcup_{a \in A} O_a$

7) קריטריון לסגירות: $\boxed{A \text{ סגורה } \Leftrightarrow cl(A) = A}$

8) $A^{\circ\circ} = A^\circ$. (ז"א: $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$)

9) $A^\circ \in \tau$ (ז"א $A^\circ$ תמיד פתוחה).

10) $\boxed{(A_1 \cap A_2)^\circ = A_1^\circ \cap A_2^\circ}$ (לכל מספר **סופי**).

11) $A^\circ$ = קב' פתוחה הכי גדולה בין תת קבוצות פתוחות של $A$, כלומר –

$$\bigcup\{O \subseteq X | O \subseteq A, O \in \tau\}$$

12) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ (ז"א $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$ )

13) $\bar{A}$ תמיד קב' סגורה.

14) $\bar{A}$ = קב' סגורה הכי קטנה בין קבוצות סגורות שמכילות את $A$. כלומר

$$\bigcap\{B \subseteq X | B \supseteq A, B \text{ סגורה ב } X\}$$

15) (הפרשים) נניח $O$ פתוחה, $B$ סגורה. אזי:

א. $O \setminus B$ פתוחה. ב. $B \setminus O$ סגורה.

<u>הסבר:</u> $O \setminus B = O \cap B^c$ $B \setminus O = B \cap O^c$ .

16) <u>**משפט הקשר**</u> בין הסגור והפנים. תמיד מתקיים:

א. $\boxed{cl(A^c) = \left(int(A)\right)^c}$

שקול: ב. $int(A^c) = \left(cl(A)\right)^c$

<u>הוכחה:</u> א $\Leftrightarrow$ ב כי נוכל להציב $A := A^c$. <u>מ"ל (א)</u>

$$x \in \left(int(A)\right)^c$$
$$\Updownarrow$$
$$x \notin int(A)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\, U \in N(x) : U \nsubseteq A$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\, U \in N(x) : \; U \cap A^c \neq \emptyset$$
$$\Updownarrow$$
$$x \in cl(A^c)$$

☺

17) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ (לכל מס' **סופי**).

<u>**הגדרה:**</u> **השפה של $A$**: $\partial(A) := \overline{A} \setminus A^{\circ}$

18) $\partial(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c}$.

<u>הסבר:</u> $\partial(A) = \overline{A} \setminus A^{\circ} = \bar{A} \cap (A^{\circ})^c \underbrace{=}_{16א.} \bar{A} \cap \overline{A^c}$

19) $\partial(A)$ תמיד סגורה!

<u>הסבר:</u> כחיתוך של קבוצות סגורות (ראו 18).

20) $\boxed{\partial(A) = \partial(A^c)}$

21) (במ"מ $(X,d)$) $\partial(A) = \{x \in X | d(x,A) = 0, d(x,A^c) = 0\}$

<u>הסבר:</u> תכונות הסגור במ"מ...

22) $cl(A) = A \cup \partial(A)$ $\quad \operatorname{int}(A) = A \setminus \partial(A)$

**<u>הגדרה</u>**: תת קבוצה $A$ במ"ט $(X,\tau)$ נקראת *צפופה* אם $cl(A)=X$.

שקול: (קריטריון צפיפות) לכל קבוצה פתוחה לא ריקה $O$ מתקיים $A\cap O\neq\varnothing$.

**תרגיל**: אם $A$ צפופה ב $X$ אז לכל קבוצה פתוחה $O$ מתקיים: $cl(O)=cl(O\cap A)$.

**<u>הגדרה</u>**: מ"ט $(X,\tau)$ נקרא **ספרבילי** אם קיימת ת"ק צפופה <u>ובת מניה</u>.

סימון: $(X,\tau)\in \mathrm{Sep}$.

**הערה**: תמיד $cl(X)=X$. לכן תמיד $X$ צפופה ב $X$. לכן מרחב טופולוגי בת מניה תמיד ספרבילי.

**הערה**: (*משפט* Weierstrass)

$(C[a,b],top(d_{\max}))=cl(P_{\mathbb{Q}}[a,b])=$ {פולינומים רציונליים}

לכן $(C[a,b],top(d_{\max}))\in Sep$.

<u>תרגילים מומלצים</u>:

- $\mathbb{R}^n\in \mathrm{Sep}$
- **הוכיחו**: $l_2\in \mathrm{Sep}$ (רמז: $A:=\{(q_1,q_2,\cdots)\in l_2 : q_k\in\mathbb{Q},\exists n\,\forall i>n\ \ q_i=0\}$)
- $(X,\tau_{discr})\in \mathrm{Sep}$ אם ורק אם $X$ בת מניה.
- חיתוך של 2 (או מספר סופי) קבוצות פתוחות צפופות גם צפופה.
- יהי $(X,\mathrm{d})$ מ"מ. תת קבוצה צפופה ב $(X,\mathrm{top(d)})$ אם ורק אם היא $\varepsilon$-צפופה לכל $\varepsilon>0$.
  הגדרה: $A$ $\varepsilon$-צפופה ב $(X,\mathrm{d})$ אם לכל $x\in X$ קיים $a\in A$ כך ש $d(x,a)<\varepsilon$.
  שקול $\bigcup_{a\in A}B(a,\varepsilon)=X$.

* **הוכיחו**: $l_\infty\notin \mathrm{Sep}$

<u>הגדרה</u>: תת קבוצה $A$ במ"ט $X$ נקראת <u>דלילה</u> (nowhere dense) אם $\mathrm{int}(cl(A))=\varnothing$.

למשל: קו ישיר דליל במישור. מישור דליל במרחב תלת ממדי.

נקודון במרחב מטרי דליל אם ורק אם היא לא מבודדת.

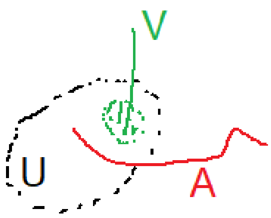
**משפט**: (**קריטריונים לקבוצות דלילות**) התנאים הבאים שקולים:

א. $A$ דלילה במ"ט $X$ (ז"א $\text{int}(cl(A))=\varnothing$).

ב. $X\setminus cl(A)$ צפופה ב $X$.

ג. $cl(A)$ לא מכיל אף תת קבוצה פתוחה לא ריקה.

ד. לכל קבוצה פתוחה לא ריקה $U$ קיימת קבוצה פתוחה $V$ כך ש:
$V\cap A=\varnothing \quad \varnothing\neq V\subseteq U$.




הוכחה:

א $\Leftarrow$ ב

$\text{int}(cl(A))=\varnothing$

$X\setminus\text{int}(cl(A))=X$

מכאן, לפי **משפט הקשר**, נקבל

$cl(X\setminus cl(A))=X$

ב $\Leftarrow$ ג

נניח בשלילה שקיימת ק"פ $\varnothing\neq O\subseteq cl(A)$. אז $O\cap(X\setminus cl(A))=\varnothing$.

מכאן $X\setminus cl(A)$ לא צפופה ב $X$ (ראו קריטריון צפיפות).

ג $\Leftarrow$ ד

נניח בשלילה שקיימת ק"פ $U\neq\varnothing$ כך שלכל ת"ק פתוחה $\varnothing\neq V\subseteq U$ מתקיים $V\cap A\neq\varnothing$

אז כל נקודה של $U$ היא נקודת סגור של $A$. זאת אומרת $U\subseteq cl(A)$. סתירה לתנאי ג.

ד $\Leftarrow$ א

נניח בשלילה שלא. אז $U:=\text{int}(cl(A))\neq\varnothing$. לכל ת"ק **פתוחה** $\varnothing\neq V\subseteq U$ מתקיים $\varnothing\neq V\subseteq\text{int}(cl(A))\subseteq cl(A)$. אבל אז לפי הגדרת סגור $V\cap A\neq\varnothing$. סתירה לתנאי ד.

☺

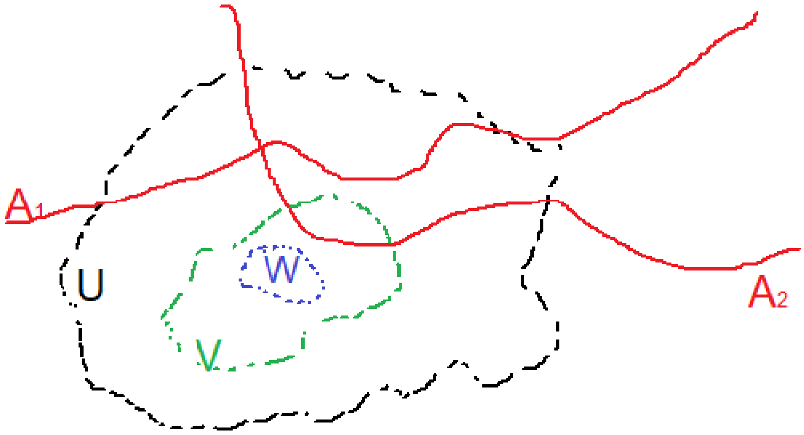
תרגילים מומלצים:

1. $A$ דלילה ב $X$ אם"ם $cl(A)$ דלילה ב $X$.
2. אם $A$ דלילה ב $X$ אז $A^c$ צפופה ב $X$.
3. איחוד בן מניה של קבוצות דלילות לא תמיד קבוצה דלילה.

**<u>טענה</u>**: איחוד **סופי** של קבוצות דלילות גם קבוצה דלילה.

הוכחה:

נניח $A_1, A_2$ דלילות ב $X$. צ"ל $A_1 \cup A_2$ דלילה ב $X$.




נשתמש בסעיף ד של המשפט.

נניח $U$ פתוחה לא ריקה. $A_1$ דלילה ב $X$. לכן קיימת ק"פ $V$ כך ש

$V \cap A_1 = \varnothing \quad \varnothing \neq V \subseteq U$.

$A_2$ דלילה ב $X$. לכן קיימת ק"פ $W$ כך ש

$W \cap A_2 = \varnothing \quad \varnothing \neq W \subseteq V$.

אז $W \cap (A_1 \cup A_2) = \varnothing \quad \varnothing \neq W \subseteq U$.

☺

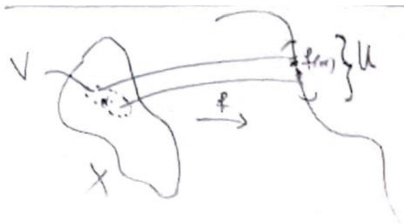
**<u>הגדרה</u>**: מ"ט נקראת *מקטגוריה ראשונה* אם הוא איחוד בן מניה של קבוצות דלילות.

אחרת, הוא נקרא *מקטגוריה שניה*.

<u>הערה</u>: <u>משפט Baire</u> אומר שכל מרחב מטרי **שלם** הוא מקטגוריה שניה
(ראו למשל "טופולוגיה קבוצתית" של האוניברסיטה הפתוחה, כרך א, עמוד 89).
<u>משפט יותר חזק</u>: לכל מרחב מטרי שלם (או לכל מרחב קומפקטי מקומית האסדורפית)
חיתוך בן מנייה של קבוצות צפופות פתוחות הוא צפוף.

# רציפות פונקציות

**<u>תזכורת: (רציפות בנקודה):</u>** נניח שנתונה פו' בין מ"ט $(X,\tau)\xrightarrow{f}(Y,\sigma)$. $f$ נקראת **רציפה בנקודה $a\in X$** אם: $\boxed{\forall\, U\in N(f(a))\ \exists\, V\in N(a): f(V)\subseteq U}$




<u>שקול:</u> $\forall\, U\in N(f(a)): f^{-1}(U)\in N(a)$

(מילולית: מקור של סביבה (ל $f(a)$) גם סביבה (ל $a$)).

**<u>משפט (קריטריון לרציפות):</u>** נניח $(X,\tau)\xrightarrow{f}(Y,\sigma)$ פו' בין מ"ט. התנאים שקולים:

1) $f$ רציפה (בכל נקודה).

2) מקור של כל קב' פתוחה גם פתוחה.

3) מקור של כל קב' סגורה גם סגור.

4) $\forall\, A\subseteq X: z\in cl(A)\Rightarrow f(z)\in cl(f(A))$.

5) $f(cl(A))\subseteq cl(f(A))$.

**<u>הוכחה:</u>**

<u>$(1)\Rightarrow(2)$:</u>

נניח $O\in\sigma$. צ"ל $f^{-1}(O)\in\tau$.

לכל $a\in f^{-1}(O)$ צ"ל ש $a\in int(f^{-1}(O))$

(קריטריון לפתיחות: $A$ פתוחה $\Leftrightarrow int(A)=A$).

$$a\in f^{-1}(O)$$
$$\Downarrow$$
$$f(a)\in O\in\sigma$$
$$\Downarrow$$
$$O\in N(f(a))$$

הגדרת הרציפות בנקודה $a$

$$\Downarrow$$

$$a \in f^{-1}(O) \in N(a)$$

הגדרת נקודות פנים

$$\Downarrow$$

$$a \in int\left(f^{-1}(O)\right)$$

$(2) \Leftrightarrow (3)$: כי $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$.

$(4) \Leftrightarrow (5)$: ברור.

נוכיח $(3) \Rightarrow (5)$:

נניח $A \subseteq X$. צ"ל $f\left(cl(A)\right) \subseteq cl\left(f(A)\right)$.

$$A \subseteq f^{-1}\left(f(A)\right) \subseteq f^{-1}\left(cl\left(f(A)\right)\right)$$

המעבר האחרון נובע מזה ש $f(A) \subseteq cl\left(f(A)\right)$. נפעיל "$cl$" בשני האגפים:

$$cl(A) \subseteq cl\left(f^{-1}\left(cl\left(f(A)\right)\right)\right) \overset{(*)}{=} f^{-1}\left(cl\left(f(A)\right)\right)$$

(בהפעלת $cl$ יש "מונוטוניות" $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow cl(A_1) \subseteq cl(A_2)$).

<u>הסבר $(*)$:</u>

א) $cl(B)$ סגור.

ב) נתון (3).

ג) $B$ סגור $\Leftrightarrow cl(B) = B$.

כעת, נפעיל $f$ על שני האגפים לקבל:

$$f\left(cl(A)\right) \subseteq ff^{-1}\left(cl\left(f(A)\right)\right) \subseteq cl\left(f(A)\right)$$

נוכיח $(4) \Rightarrow (1)$:

נניח בשלילה ש - $(1)$ לא נכון. ז"א, $f$ לא רציפה בנקודה מסוימת $a \in X$.

ז"א, קיימת <u>סביבה פתוחה</u> $U$ של $f(a)$ כך ש - $f^{-1}(U) \notin N(a)$.

שקול: $a \notin int\left(f^{-1}(U)\right)$

שקול: $cl\left(f^{-1}(U)^c\right) \underbrace{=}_{\text{תכונת הקשר}} \left(int\left(f^{-1}(U)\right)\right)^c \ni a$

בגלל נתון (4) נקבל:

$$f(a) \in cl\big(f(f^{-1}(U)^c)\big) = cl\big(f(f^{-1}(U^c)\big) \subseteq cl(U^c) = U^c$$

(המעבר האחרון נובע כי $U$ פתוחה ולכן $Y \setminus U$ סגורה, וסגור של סגורה שווה לעצמה).

קיבלנו: $f(a) \notin U$ בסתירה לנתון!

☺

**<u>משפט</u>:** (Heine-$\frac{1}{2}$) כל $f$ רציפה שומרת על התכנסות סדרות.

**<u>הוכחה:</u>**

$$x_n \xrightarrow{\tau} a \underbrace{\Rightarrow}_{\text{צריך להוכיח}} f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(a)$$

שקול להוכיח – $\forall\, U \in N\big(f(a)\big)\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: f(x_n) \in U$

עבור $U \in N\big(f(a)\big)$ המקור $f^{-1}(U) \in N(a)$ (בגלל רציפות $f$ בנקודה $a$).

נתון $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

וגם ידוע $f^{-1}(U) \in N(a)$ ולכן קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש – $x_n \in f^{-1}(U)$

מכאן $\forall n \geq n_0: f(x_n) \in U$

☺

**<u>הערה חשובה:</u>** במ"מ ההיפך גם נכון (עיקרון $Heine$). אבל זה לא תמיד נכון במ"ט ! (אפילו אם מתקיימת תכונת האוסדורף).

ראו דוגמה ב מתחילת ההרצאה

$id:(X,\tau) \to (X,\tau_{discr})$ שומרת על התכנסות סדרות אבל לא רציפה.

**<u>תכונות נוספות של פונקציות רציפות:</u>**

- כל $(X,\tau_{discr}) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ תמיד רציפה.
- כל $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\tau_{tr})$ תמיד רציפה.
- הרכבה $f_2 \circ f_1 : X_1 \to X_3$ של פונקציות רציפות $f_1 : X_1 \to X_2$

  $f_2 : X_2 \to X_3$ היא גם רציפה.
- הוכיחו שבכל במ"ט $(X,\tau)$ ולכל $f_1, f_2 \in C(X)$ מתקיים :

א) $f_1 + f_2 \in C(X)$.

ב) $f_1 \cdot f_2 \in C(X)$.

ג) $\frac{f_1}{f_2} \in C(X)$ בתנאי ש - $f_2(x) \neq 0$ לכל $x \in X$.

הערה: נוח לבדוק "דרך סביבות".

**משפט (תורשתיות של רציפות):** $f: X \to Y$ רציפה, $\emptyset \neq A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ כך ש $f(A) \subseteq B$. אזי פונקציה מושרית $\boxed{\begin{matrix} A \overset{f_0}{\rightarrow} B \\ a \mapsto f(a) \end{matrix}}$ גם רציפה.

**<u>הוכחה:</u>**

בודקים לפי קריטריון רציפות מספר 2 (ז"א מקור של קבוצה פתוחה הוא גם פתוח).

צ"ל שלכל קבוצה פתוחה $O \cap B$ (כאשר $O \in \tau_Y$) ב – $B$ מתקיים $f_0^{-1}(O \cap B)$ פתוחה ב- $A$.

$$\begin{aligned} f_0^{-1}(O \cap B) &= \{x \in A | f(x) \in O \cap B\} = f^{-1}(O \cap B) \cap A \\ &= f^{-1}(O) \cap f^{-1}(B) \cap A \underbrace{=}_{f(A)\subseteq B} \underbrace{f^{-1}(O)}_{\substack{X\text{פתוחה ב-} \\ f \text{ בגלל רציפות}}} \cap A \end{aligned}$$

לכן $f^{-1}(O) \cap A$ קבוצה פתוחה ב $A$ (תת מרחב).

☺

# הרצאה 6

**שאלה כללית**: אילו תכונות נשמרות על ידי "תמונה רציפה" ?

בהמשך נוכיח זאת עבור מספר תכונות. למשל : ספרביליות , קשירות,

קשירות מסילתית, קומפקטיות, קומפקטיות סדרתית ...

(פונקציה **רציפה על** $f : X \to Y = f(X)$ )

**משפט:** צפיפות וספרביליות נשמרות על ידי תמונה רציפה.

**הוכחה:** נניח $f\colon X \to Y$ רציפה על, ז"א $f(X) = Y$.

צ"ל $\bar{A} = X \Leftarrow \overline{f(A)} = Y$.

שקול להוכיח $\overline{f(A)} = f(X)$.

לפי קריטריון (5) של רציפות מתקיים: $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

נציב $\bar{A} = X$ ונקבל $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$.

מצד שני, $\overline{f(A)} \subseteq Y = f(X)$.

לכן קיבלנו: $\overline{f(A)} = f(X) = Y$

והוכחנו שנשמרת צפיפות.

עכשיו אם ניקח $X \in Sep$ אז קיים $A \subseteq X$ כך ש - $|A| \leq \aleph_0$ , $\bar{A} = X$.

אז $\overline{f(A)} = f(X) = Y$.

$|f(A)| \leq \aleph_0$ גם בת מנייה! מכאן גם $Y \in Sep$.

☺

## איזומורפיזמים במרחבים טופולוגיים

**תזכורת:** איזומורפיזם ב $Metr$ = איזומטריות.

איזומורפיזם ב $TOP$ = $homeomorphism$.

**הגדרה:** נניח $(X_2,\tau_2) \xrightarrow{f} (X_1,\tau_1)$ פונקציה בין מ"ט. $f$ נקרא **הומיאומורפיזם**

(Homeomorphism *אזהרה: זה לא* Homomorphism )

אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

א) $f$ חח"ע + על (ז"א קיימת <u>פונקציה</u> $f^{-1}$).

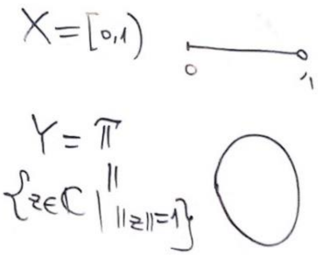
ב) $f$ רציפה.

ג) $f^{-1}$ רציפה.

**<u>הערה:</u>** $\begin{cases}(\text{א})\\(\text{ב})\end{cases} \not\Rightarrow (\text{ג})$ אפילו במקרים טבעיים.

<u>דוגמה 1:</u> $f = id : (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \to \mathbb{R}$ רציפה אבל לא $f^{-1} : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \tau_{discr})$

$\{0\} \in \tau_{discr}$ אבל $(f^{-1})^{-1}(0) = \{0\} \notin \tau$.

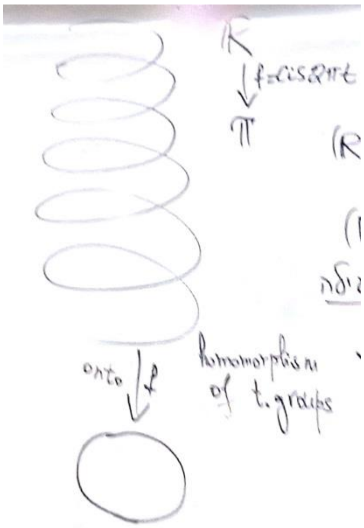


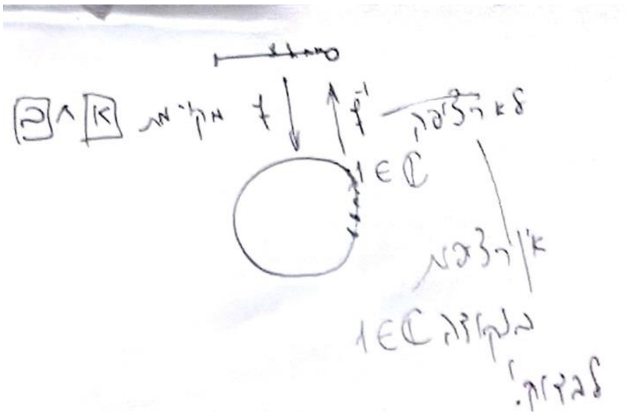

<u>דוגמה 2:</u> (גיאומטרית) $f : [0,1) \to T$

$$q : \mathbb{R} \to T := \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}, \quad q(t) = cis(2\pi t) = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)$$

זאת פונקציה רציפה (וגם הומומורפיזם חבורות).

כעת נגדיר צמצום של פונקציה הנ"ל $f : [0,1) \to T$.




אז $f : [0,1) \to T$ רציפה חח"ע ועל

אבל $f^{-1} : T \to [0,1)$ לא רציפה בנקודה $z = 1 \in T$.

(למצוא תת קבוצה פתוחה (סגורה) ב $[0,1)$ כך שהמקור לא פתוחה (לא סגורה) ב $T$)

**<u>הגדרה:</u>** נסמן $(X_1, \tau_1) \simeq (X_2, \tau_2)$ אם קיים $X_1 \xrightarrow{f} X_2$ $homeomorphism$ ונגיד

## מרחבים **הומיאומורפיים.**

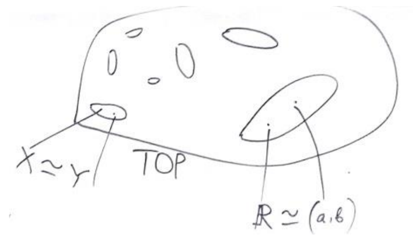
תכונות שמחלקות את TOP למחלקות :

1) $(X,\tau) \simeq (X,\tau)$.

2) $(X_2,\tau_2) \simeq (X_1,\tau_1) \Leftarrow (X_1,\tau_1) \simeq (X_2,\tau_2)$.

3) $\begin{cases}(X_1,\tau_1) \simeq (X_2,\tau_2)\\(X_2,\tau_2) \simeq (X_3,\tau_3)\end{cases} \Rightarrow (X_1,\tau_1) \simeq (X_3,\tau_3)$.

(בשביל להוכיח את (1) משתמשים ב - $id$, בשביל (2) ב - $f^{-1}$ ובשביל (3) $f_1 \circ f_2$).




<u>**שאלה חשובה**</u>: מתי 2 מרחבים טופולוגיים $X,Y$ הם הומיאומורפיים

או ומתי לא ? $X \simeq Y$ או $X \not\simeq Y$

<u>**שאלה יותר כללית**</u>: מתי קיימת פונקציה רציפה **ועל** $X \xrightarrow{f} Y$ (ז"א מתי $Y$ = "תמונה רציפה" של $X$).

<u>**הערה**</u>: מה התכונות שנשמרות ע"י הומיאומורפיזמים או ע"י תמונה רציפה ?

א) כל תכונה טופולוגית נשמרת ע"י הומיאומורפיזם.

ב) כל תכונה מטרית נשמרת ע"י איזומטריה.

**דוגמאות להומיאומורפיזמים:**

- הרכבה של פונקציות רציפות (הומיאומו') גם רציפה (הומיאומו').
- אם $f: X \to Y$ רציפה (הומיאומו') אז גם $f: A \to f(A)$ רציפה (הומיאומו').
- כל איזומטריה בעצם הומיאומורפיזם (ההיפך לא תמיד נכון!).
- בכל מרחב נורמי $(E,\|\cdot\|)$: כפל בסקלר $c \neq 0$ תמיד הומיאומורפיזם: $M_c: E \to E \in Lip_{|c|}$, $M_c(x) = c \cdot x$, $0 \neq c \in \mathbb{R}$ קבוע נתון.

$$\boxed{M_c^{-1} = M_{c^{-1}}}$$

- <u>**משפט**</u>: כל מרחב נורמי $\underbrace{\simeq}_{\text{הומיאומורפי}}$ לכל כדור פתוח שלו.

**הוכחה:**

**שלב א'** $\forall r > 0, \forall a \in E: B_r(a) \simeq B_1(0)$

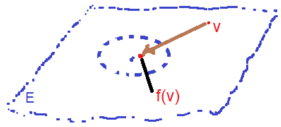
כי: $B_1(0) \underbrace{\simeq}_{M_r} B_r(0) \underbrace{\simeq}_{T_a} B_r(a)$

הערה: הרכבה של הומיאומורפיזם גם עם צמצום מלא (גם בטווח) הוא הומיאומורפיזם.

**שלב ב'** מ"ל ש: $E \underbrace{\simeq}_{f} B_1(0)$.

נגדיר $\boxed{f(v) = \frac{1}{1+\|v\|} \cdot v}$ $\quad f : E \to B(0_E,1)$

$f(v) \in B(0_E,1) \Leftarrow \| f(v) \| = \| \frac{1}{1+\|v\|} v \| = \frac{\|v\|}{1+\|v\|} < 1$




$f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\|x\|} \cdot x$ $\quad f^{-1} : B(0_E,1) \to E$

☺

**תוצאות:**

$\mathbb{R} \simeq (-1,1) \simeq (a,b) \quad \forall a < b$

$\mathbb{R}^n \simeq B(v,r) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^2 \simeq$ **עיגול פתוח** $\simeq (-a,a) \times (-a,a)$

(רמז: $\|\ \|$ שקול טופולוגית ל $\|\ \|_{\max}$ ב $\mathbb{R}^2$)

**הערה: הומיאומורפיזם לא תמיד שומר על תכונות מטריות (חסימות, שלמות, ...)**

**המשך דוגמאות:**

- $[a,b] \simeq [c,d]$ כאשר $a < b\,, c < d$
- $(a,\infty) \simeq (c,d) \simeq (-\infty,b)$

(חלק מההסבר: $(0,\infty) \underset{\log_2}{\overset{2^x}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}$).

**תרגיל:** למיין קטעים ב - $\mathbb{R}$:

א) עד כדי הומיאומורפיזמים (כן יחס שקילות!).

ב) עד כדי תמונה רציפה (לא יחס שקילות!).

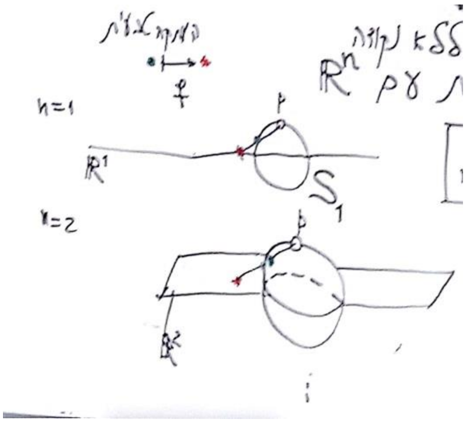
- היטל סטריאוגרפי

**טענה:** ספירה $n$ מימדית $S_n$ ללא נקודה אחת היא הומיאומורפית עם $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{S_n/\{z\} \simeq \mathbb{R}^n}$$

ניזכר כי: $S_n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \big| \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$

למשל: כאשר $n = 1,2$ נגדיר $f$ לפי:




# קשירות

**הערה:** לכל מ"ט $(X, \tau)$ תת קבוצות $\emptyset, X$ תמיד סגוחות (כי $X = \emptyset^c$, $\emptyset = X^c$).

השאלה: מתי יש סגוחות נוספות לא טריוויליות ?

**הגדרות:** נניח $(X, \tau)$ מ"ט.

א) $X = X_1 \cup X_2$ נקרא **פירוק טופולוגי** אם:

$$\begin{cases} X_1 \cap X_2 = \emptyset \\ X_1, X_2 \text{ פתוחות} \\ \text{לא ריקות} \end{cases}$$

לתנאי השני שקול – סגורות, וגם שקול – **סגוחות**.

ב) אומרים $(X, \tau)$ **קשיר** $(Connected)$ ונסמן: $(X, \tau) \in Conn$ אם **לא** קיים פירוק טופולוגי

**הערה חשובה**: $(X,\tau)$ **לא קשיר** אם ורק אם קיימת תת קבוצה סגוחה לא ריקה ששונה מ $X$.

- אם: $[2,4)\cup(5,\infty) = \underbrace{X}_{\text{כתת מרחב}} \subset \mathbb{R}$

אז $X$ **לא קשיר**. שימו לב ש $(5,\infty)$ ו $[2,4)$ **סגוחות** ב $X$ (לא ב $\mathbb{R}$).

- מרחב מטרי של רציונליים $\mathbb{Q}$ (כתת מרחב בממשיים) לא קשיר.

יש אינסוף ת"ק סגוחות ובהתאם יש אינסוף "פירוקים טופולוגיים". למשל:

$$X_1 = \left(-\infty, \sqrt{2}\right) \cap \mathbb{Q}$$

$$X_2 = \mathbb{Q} \cap \left(\sqrt{2}, \infty\right)$$

- הוכיחו שמרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$ (עם מטריקה $p$ –אדית) הוא לא קשיר.

**הגדרה:** נניח $(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2) \in TOP$ כך ש - $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset$.

מגדירים **סכום טופולוגי** $X = X_1 \sqcup X_2$ כקבוצה $X = X_1 \cup X_2$ עם טופולוגיה הבאה

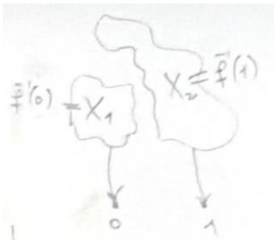
$$\tau \coloneqq \{O_1 \cup O_2 | O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}$$

**תרגיל**: הוכיחו שמרחב לא קשיר אם"ם הוא הומיאומורפי לסכום טופולוגי.

**משפט:** התנאים הבאים שקולים:

1) $(X,\tau) \notin Conn$ (ז"א לא קשיר).

2) קיימת פונקציה רציפה – $X \xrightarrow{f} [0,1]$ כך ש $f(X) = \{0,1\}$




**הוכחה**: $1 \Rightarrow 2$ לפי משפט רציפות ש"ל מקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (יש 4 מקרים...)

$$f^{-1}(O) = \begin{cases} X & \{0,1\} \subset O \\ \varnothing & \{0,1\} \cap O = \varnothing \\ X_1 & \{0,1\} \cap O = \{0\} \\ X_2 & \{0,1\} \cap O = \{1\} \end{cases}$$

$2 \Rightarrow 1$ $\quad X = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$ פירוק טופולוגי (מדוע ?)

☺

**<u>שימו לב:</u>** אין תכונת ערך ביניים! בהמשך זה נותן מחצית ל- "משפט ערך ביניים".

**<u>תרגיל</u>**: הוכיחו (הכללת המשפט הקודם) נקודות אי-רציפות של פונקציה האופיינית $\chi_A$ של $A \subseteq X$ היא $\partial(A)$. כאשר:

$$\chi_A : X \to \{0,1\},\ \chi_A(a) = 1 \quad \forall a \in A, \quad \chi_A(x) = 0 \quad \forall x \notin A$$

**הערה:** $A \subseteq X$ סגורה אם ורק אם $\partial(A) = \varnothing$.

**<u>משפט</u>**: קשירות נשמרת ע"י תמונה רציפה.

**הוכחה:**

נניח ש $X \in Conn$. מאחר ו- $f$ על אז $f(X) = Y$. צ"ל $Y \in Conn$.

אם נניח שלא, אז $Y$ פריק טופולוגית: $\quad Y = \underbrace{Y_1}_{\neq\emptyset} \sqcup \underbrace{Y_2}_{\neq\emptyset}$ כאשר $Y_1, Y_2$ פתוחות.

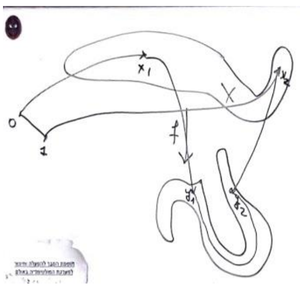
אזי $\quad X = f^{-1}(Y_1) \sqcup f^{-1}(Y_2)$

כאשר $f^{-1}(Y_1), f^{-1}(Y_2) \neq \emptyset$ (כי $f$ היא פונקציה על) וגם הן **פתוחות** כי $f$ רציפה.
קיבלנו ש $X$ פריק, ז"א $X \notin Conn$ בסתירה!

**<u>הגדרה</u>**: מ"ט $X$ **קשיר מסילתית** אם לכל $x, y \in X$ קיימת מסילה מ $x$ ל $y$. **מסילה** מ $x_1$ ל $x_2$ $\quad [0,1] \xrightarrow{\varphi} X$ פונקציה רציפה, $\varphi(0) = x_1$ , $\varphi(1) = x_2$. סימון: $X \in PConn$.

**<u>משפט</u>**: קשירות מסילתית נשמרת ע"י תמונה רציפה.

**הוכחה:** נניח ש - $X \in PConn$. $f$ על ורציפה אז $f(X) = Y$. צ"ל - $Y \in PConn$.



נניח $y_1, y_2 \in Y$, אז קיימים $x_1 \xrightarrow{f} y_1$, $x_2 \xrightarrow{f} y_2$ כי $f$ על.

קיימת מסילה מ $x_1$ ל $x_2$ $\quad [0,1] \xrightarrow{\varphi} X$ פונקציה רציפה, $\varphi(0) = x_1$ , $\varphi(1) = x_2$ .

נגדיר מסילה – $\quad [0,1] \xrightarrow{f \circ \varphi} Y \qquad [0,1] \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{f} Y$

ואז מצאנו מסילה בין $y_1$ ל - $y_2$.

☺

**אזהרה**: תמונה $f[0,1]$ של המסילה לא תמיד הומיאומורפי ל $[0,1]$.

למשל ידוע שקיימת פונקציה רציפה **ועל** $f:[0,1]\to[0,1]^2$ (Peano curve).

<u>**משפט:**</u> $PConn \subset Conn$.

**הוכחה:** נניח $X \in PConn$. צ"ל $X \in Conn$.

אם נניח בשלילה שלא, אז $X$ פריק: $X = X_1 \sqcup X_2$

נבחר $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

$X \in PConn \Leftarrow$ קיימת מסילה מ $x_1$ ל $x_2$, לכן

$[0,1] \xrightarrow{\varphi} X \quad \varphi(0) = x_1, \varphi(1) = x_2$

כעת $[0,1] = \varphi^{-1}(X_1) \sqcup \varphi^{-1}(X_2)$

$\varphi^{-1}(X_1)$, $\varphi^{-1}(X_2)$ קבוצות זרות פתוחות (רציפות !)

לא ריקות $(0 \in \varphi^{-1}(X_1), 1 \in \varphi^{-1}(X_2))$

ואז קיבלנו פירוק של $[0,1]$ בסתירה לכך ש - $[0,1] \in Conn$ .

☺

**טענה**: $[0,1] \in Conn$.

**הוכחה**: נניח בשלילה שיש פירוק טופולוגי $[0,1] = X_1 \cup X_2$. בה"כ $0 \in X_1, 1 \in X_2$ .

$X_1$ פתוחה ב $[0,1]$. לכן קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $[0,0+\varepsilon) \subset X_1$.

נסמן $A := \{x \in [0,1] : [0,x) \subset X_1\}$ $c := \sup A,$ .

אז $[0,0+\varepsilon) \subset A$, $0 < c$ .

נוכיח ש $c \in A$ .

צ"ל $[0,c) \subset X_1$.

אכן, לכל $x \in [0,c)$ (לפי הגדרת $c := \sup A$) קיים $\exists y \in A \ \ x < y < c$ .

ז"א $[0,y) \subset A$

קבוצה $X_1$ סגורה ב $[0,1]$. לכן $c \in cl[0,c) \subset cl(X_1) = X_1$ .

מצד שני $X_1$ פתוחה ב $[0,1]$. לכן עבור נקודה $c$ קיים $\varepsilon > 0$ כך ש
$(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \cap [0,1] = (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset X_1$ (קחו בחשבון ש $0 < c$)

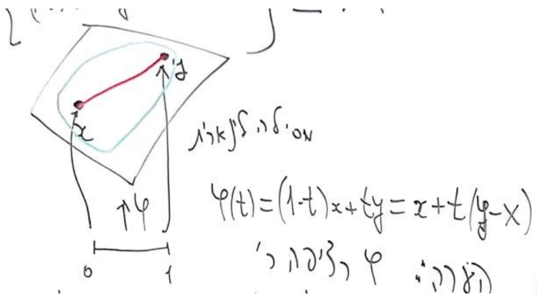
בפרט $[c,c+\varepsilon)\subset X_1$.

נקבל $[0,c)\cup[c,c+\varepsilon)=[0,c+\varepsilon)\subset X_1$.

מכאן $c+\varepsilon\in A$. אבל אז מתקבלת סתירה עם הגדרת $c:=\sup A$.

מש"ל

**הגדרה:** תת קבוצה $X$ במ"נ $(E,\|\cdot\|)$ נקראת **קבוצה קמורה** $(convex)$ אם לכל $x,y\in X$ מתקיים $X \supseteq \{(1-t)x+ty: 0\le t\le 1\}$ (מסילה לינארית) נסמן $X\in Conv$.




**הערה:**

$\varphi$ רציפה כי $\varphi\in Lip_{\|y-x\|}$.

**דוגמה:** כל מ"נ $(E,\|\cdot\|)$ וכדורים בתוכו (פתוחים, סגורים) קבוצות קמורות ב E.

**טענה:** $\boxed{Conv\subsetneq PConn\subsetneq Conn}$

# הרצאה 7

**הגדרה:** $\varnothing\neq X\subseteq\mathbb{R}$ **קטע** אם לכל $a,b\in X$ מתקיים $[a,b]\subseteq X$.

**טענה**: נניח $X\subset\mathbb{R}$ תת מרחב. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) $X$ "קטע" (יתכן כמובן לא חסום)

2) $X\in Conv$

3) $X\in PConn$

4) $X\in Conn$

**הסבר:** $(2) \Leftarrow (1)$ : לכל $a,b \in X$ מתקיים $[a,b] \subseteq X$. מצד שני $[a,b]=\{a+(b-a)t \mid 0 \le t \le 1\}$.

$(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$ נובע מהכלות ברורות $Conv \subseteq PConn \subseteq Conn$.

$(4) \Rightarrow (1)$ אם נניח שלא, אז $X$ לא קטע, כלומר קיימים $a,b \in X$ כך ש $[a,b] \not\subset X$ .

ז"א קיימים: $a < c < b$ כך ש $a,b \in X$ אבל $c \notin X$.

נגדיר $X_1 \coloneqq (-\infty, c) \cap X, X_2 \coloneqq (c,\infty) \cap X$

ואז נקבל ש $X = \underbrace{X_1}_{a\in} \sqcup \underbrace{X_2}_{b\in}$ פירוק טופולוגי.

ואז קיבלנו ש $X \notin Conn$ בסתירה!

☺

<u>**משפט**</u> **(ערך הביניים):** נניח $X$ מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in Conn$.

2) לכל פונקציה רציפה $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ ממשית יש תכונת ערך ביניים.

<u>**הוכחה:**</u> $(2) \Leftarrow (1)$: תמונה רציפה שומרת על $Conn$. לכן $Conn \ni f(X) \subset \mathbb{R}$ ואז מהטענה הקודמת נקבל ש - $f(X) \in \{$קטעים$\}$, ואז $f(X)$ בעל תכונת ערך הביניים.

$(1) \Leftarrow (2)$: נניח בשלילה שלא. אז $X \notin Conn$. ז"א קיים פירוק טופולוגי $X = X_1 \sqcup X_2$

נגדיר פונקציה $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, אשר שולחת את $X_1$ ל 0 ואת $X_2$ שולחת ל 1.

$X_1$, $X_2$ פתוחות ב $X$ ⇐ קל לבדוק (4 מקרים) שאכן מקור של קבוצה פתוחה גם קבוצה פתוחה, ואז $f$ רציפה. אבל נקבל ש $f(X)=\{0,1\}$.

וזאת לא מקיימת את תכונת ערך הביניים, בסתירה!

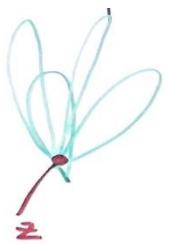
☺

<u>**משפט**</u> **(האלומות – תנאי מספיק לקשירות):** נניח $X$ מ"ט, $X = \bigcup_{j\in J} Y_j$ כך ש:

1) $\forall j \in J: Y_j \in Conn$

2) $\bigcap_{j\in J} Y_j \neq \emptyset$

אזי $X \in Conn$.




**הוכחה:** מתכונה (2) קיימת נקודה משותפת $z \in \bigcap_{j\in J} Y_j$.

נניח בשלילה ש – $X$ פריק, אזי קיימות קבוצות זרות ופתוחות ולא ריקות $X_1, X_2$ כך ש –

$$X = X_1 \sqcup X_2$$

בה"כ $z \in X_1$ (ואז $z \notin X_2$).

מתקיים $\forall j \in J: Y_j = \left(Y_j \cap X_1\right) \sqcup \left(Y_j \cap X_2\right)$

כעת נשים לב ש $Y_j \cap X_1$ ו $Y_j \cap X_2$ פתוחות וזרות בתת מרחב $Y_j$ ו$z \in Y_j \cap X_1$.

אז $Y_j \cap X_2 = \emptyset$ לכל $j$, אחרת היינו מקבלים ש $Y_j \notin Conn$ (פריק).

כעת $X_2 = \bigcup_{j\in J}\left(X_2 \cap Y_j\right) = \emptyset$ בסתירה לפירוק של $X$.

☺

**<u>תוצאות:</u>**

1) נניח $X = Y_1 \cup Y_2$, כאשר $Y_1, Y_2 \in Conn$, $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. אזי $X \in Conn$

2) **שרשור**

נניח $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Y_k$, כאשר $Y_k \in Conn$ לכל $k \in \mathbb{N}$ וכן –

$$\forall k \in \mathbb{N}: Y_k \cap Y_{k+1} \neq \emptyset$$

אזי $X \in Conn$.

**הסבר:** 1) מיידי מהמשפט!

2) נובע מ $(1)$ ואינדוקציה נובע מקרה של מס' סופי של הגורמים.

$$\forall k \in \mathbb{N}: A_k \coloneqq Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_k \in Conn$$

נשים לב $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$

וברור $A_1 \subseteq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \neq \emptyset$

לכן לפי משפט האלומות נקבל ש $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in Conn$.

☺

**<u>הגדרה:</u>** **(מרכיבי קשירות):** במ"ט $X$ נגדיר את היחס הבא

$x \equiv y \overset{def}{=}$ אם "אפשר לחבר $x$ ל $y$ ע"י קבוצה קשירה". זאת אומרת, קיימת

$$Conn \ni A_{x,y} \subset X$$

כך ש $\{x, y\} \subset A$


**טענה**: היחס הנ"ל הוא יחס שקילות.

**הסבר:**

1) $x \equiv x$ הסבר: $A_{x,x} = \{x\}$.

2) $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$, הסבר: $A_{y,x} \coloneqq A_{x,y}$.

3) צ"ל $\begin{cases} x \equiv y \\ y \equiv z \end{cases} \Leftarrow x \equiv z$ הסבר: $A_{x,z} := A_{x,y} \cup A_{y,z}$

ואכן $y \in A_{x,y}$ וגם $y \in A_{y,z}$ ואז מתוצאה 1 (שירשור) נקבל ש - $A_{x,z} \in Conn$.

**<u>הגדרה</u>: מרכיב קשירות** של נק $x$ ב $X$ הוא $[x] := \{y \in X | x \equiv y\}$ "מחלקה של $x$".

כאשר $x \equiv y \Leftrightarrow \exists A_{x,y} \in Conn, \{x,y\} \subseteq A_{x,y} \subseteq X$

**תכונות מרכיבי קשירות:**

- $X = \bigcup_{x \in X} [x]$ (יש חזרות! $x \equiv y \Leftrightarrow [x] = [y]$).
- מס' (עוצמה) של מרכיבי קשירות נשמר ע"י הומיאומורפיזמים.
- $X$ קשיר $\Leftrightarrow$ יש מרכיב קשירות 1 בלבד.

רמז: משפט האלומות.

- $[x] \in Conn$
- $[x] = \bigcup \{A \subseteq X | x \in A , A \in Conn\}$

ז"א $[x] =$ תת קבוצה קשירה הגדולה ביותר המכילה את $x$.

- $[x]$ סגור ב $X$.

רמז: תוכיחו קודם את הטענה הבאה (ואז תשתמשו בתכונה הקודמת):

**<u>טענה</u>:** (תרגול) נניח $X = \bar{Y}$ (ז"א $Y$ צפופה ב $X$). אם $Y \in Conn$ אז גם $X \in Conn$.

**דוגמה**: תארו מרכיבי קשירות של:

א. $X = (0,2) \cup (2,5) \cup \{7\}$

תשובה: $[1] = (0,2), [3] = (2,5), [7] = \{7\}$

ב. $X = \{1,2,3,4\} \times \mathbb{R}$

תשובה: $\{1\} \times \mathbb{R}, \{2\} \times \mathbb{R}, \{3\} \times \mathbb{R}, \{4\} \times \mathbb{R}$.

**הגדרה:** מ"ט $X$ נקרא **"לא קשיר לחלוטין"** ($totally\ disconnected$) אם

$[x] = \{x\}$ לכל $x \in X$ (**רק** נקודון תת קבוצה קשירה).

הערה: במקרה מנוון של מרחב נקודון מתקבל מרחב מוזר שהוא גם קשיר וגם לא קשיר לחלוטין.

**דוגמאות:**

1) מרחבים דיסקרטיים.

2) $\mathbb{Q}$

3) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

4) * $(\mathbb{Z}, d_p)$

(רמז: לכל $a \in (\mathbb{Z}, d_p)$ ו $b \neq a$ קיימת סביבה סגוחה $U \in N(a)$ כך ש $b \notin U$)

**<u>הגדרה</u>: (מרכיב קשירות מסילתי)**: לכל מ"ט $X$ ונקודה $x \in X$ מרכיב קשירות $[\mathrm{x}]_p$

של $x$ מוגדר כמחלקת שקילות של $x$ לגבי יחס שקילות הבא:

$$x \equiv_P y \overset{def}{=} \text{קיימת ב}X\text{מסילה מ } x \text{ ל } y$$

**טענה:** $\equiv_P$ יחס שקילות.

**הסבר:**

1) $x \equiv_P x$. ניקח מסילה קבועה.

2) $y \equiv_P x \Leftarrow x \equiv_P y$. עבור מסילה $f: [0,1] \to X$

נגדיר "מסילה הפוכה" $f^*(t) = f(1-t)$ $f^*: [0,1] \to X$

3) $x \equiv_P z \Leftarrow \begin{cases} x \equiv_P y \\ y \equiv_P z \end{cases}$

עבור $\begin{cases} f_1(0) = x, f_1(1) = y \\ f_2(0) = y, f_2(1) = z \end{cases}$ נגדיר $f_3: [0,1] \to X$ כך ש $f_3(t) = \begin{cases} f_1(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f_2(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$

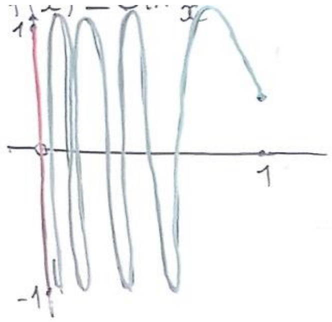
$$f_3(0) = x, f_3(1) = z$$

ונקבל ש $f_3$ רציפה מהתרגיל הבא (שהיה בתרגול):

**תרגיל:** נניח $X = Y_1 \cup Y_2$, $Y_1, Y_2$ סגורות.

נתונה פונקציה $X \xrightarrow{f} Z$ כך ש הצמצומים $f|_{Y_1}: Y_1 \to Z$, $f|_{Y_2}: Y_2 \to Z$ רציפות.

אז $f$ רציפה (* תנו דוגמה נגדית אם אין סגירות!).




**<u>הערה</u>:** $PConn \neq Conn$

נגדיר פונקציה $[-1,1] \xrightarrow{f} (0,1]$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

נגדיר $X \coloneqq (\{0\} \times [-1,1]) \cup Gr(f)$ "Sine curve"

$$(0,1] \simeq Gr(f) \coloneqq \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 < x \le 1 \right\}$$

כעת, $Gr(f) \simeq (0,1]$ קשיר ו $Gr(f)$ צפוף ב $X$ (כלומר $\overline{Gr(f)} = X$), לכן (לפי התרגיל הנ"ל) $X \in Conn$. ז"א יש מרכיב קשירות 1.

אבל אין מסילה מנקודה "אדומה" (על הקטע) לנקודה "ירוקה" (ראו ספר האוניברסיטה הפתוחה, טופולוגיה קבוצתית).

יש 2 מרכיבי קשירות מסילתיים ולכן $X$ לא קשיר מסילתית, כלומר $X \notin PConn$.

__תרגיל__: **(לעתיד)** לכל פונקציה רציפה $X \xrightarrow{f} Y$ מתקיים ש

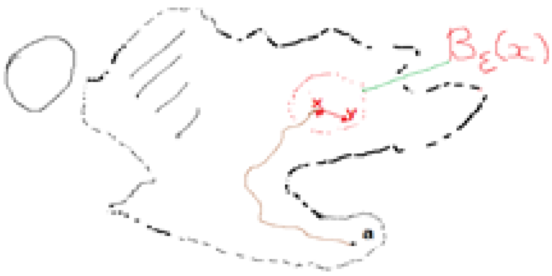
$X \simeq \underbrace{Gr(f) := \{(x, f(x)) | x \in X\}}_{\text{תת מרחב טופולוגי}} \subset X \times Y$.

בהמשך נלמד מכפלה טופולוגית (באופן כללי).

**__משפט__**: כל קבוצה __קשירה ופתוחה__ $O$ במרחב __נורמי__ $E$ היא קשירה מסילתית.

__הוכחה__: נבחר $a \in O$ ונסמן $a \in \mathrm{A} := [a]_p$ מרכיב קשירות מסילתית של $a$ במרחב $O$.
אז $\mathrm{A}$ פתוחה ב $O$. כי אם $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ אז $\mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x}) \subseteq O$ עבור $\varepsilon$ מספיק קטן. $\mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x})$ קמור לכן קיימת מסילה לינארית ב $\mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x})$ מ $\mathrm{x}$ לכל $y \in \mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x})$. אז גם קיימת מסילה (לא בהכרח לינארית) במרחב $O$ מנקודה $a$ ל $y$ (טרנזיטיביות). לכן $\mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x}) \subseteq A$.

באופן דומה אפשר להוכיח שגם המשלים $O \setminus A$ פתוח ב $O$. אבל אז $O \setminus A$ קבוצה ריקה כי אחרת נקבל ש $O$ פריק. לכן $\mathrm{O} = \mathrm{A} = [a]_p$ ואז $O$ קשיר מסילתית (מרכיב 1).




---

**__הגדרה__**: $X$ נקרא **קשיר מקומית** בנקודה $a \in X$ אם לכל סביבה $U \in N(a)$ קיימת סביבה $U \supseteq V \in N(a)$ כך ש $V$ קשיר. אומרים: *קשיר מקומית* אם זה מתקיים בכל נקודה.

__תרגיל:__

**א.** הוכיחו שכל תת קבוצה פתוחה במרחב נורמי היא קשירה מקומית (ולא תמיד קשירה).

ב. * תנו דוגמה של תת מרחב ב $\mathbb{R}^2$ שהוא קשיר אבל לא קשיר מקומית.

# הומיאומורפיזמים המשך:

- $[3,8] \ncong [0,1] \cup [3,6]$

כי הראשון קשיר והשני לא קשיר.

**<u>הגדרה</u>**: נקודה $a \in X$ במ"ט $X$ נקראת **<u>מחלקת</u>** אם: $X$ קשיר אבל $X \setminus \{a\}$ לא קשיר.

למשל: בעקומה הבאה נקודות אדומות הן נקודות מחלקות

**הגדרה**: אם: $X$ קשיר אבל $X \setminus \{a\}$ עם $n$ מרכיבי קשירות אז אפשר להגדיר *נקודה מחלקת עם דרגה n*.

**הערה**: הומיאומורפיזם מעביר נקודה מחלקת (עם דרגה $n$) לנקודה מחלקת (מדרגה $n$).
אם $X \xrightarrow{f} Y$ אז צמצום מלא

$\underbrace{X/\{p\}}_{\substack{\text{פריק}\\ \text{ז"א לא קשיר}}} \xrightarrow{f_*} \underbrace{Y/\{f(p)\}}_{\text{שגם פריק}}$ גם הומיאומורפיזם.

הסבר: שימוש (פעמיים) בתורשתיות של הרציפות.

- $[0,1) \ncong (2,5)$ $\qquad$ $(0,1) \ncong [2,3]$

ב - $(2,5)$ כל נקודה היא "נקודה מחלקת" ($(2,5)/\{c\} \notin Conn$). אבל ב - $[0,1)$ יש נק' שלא מחלקת, זאת נק' 0. $\quad [0,1)/\{0\} \in Conn$

**תכונה חשובה**: הומיאומורפיזם שומר על נקודות מחלקות.

כנ"ל: מספר נקודות מחלקות, מספר נקודות לא מחלקות. כנ"ל מספר *מרכיבי קשירות* .

- הוכיחו ש - $8 \ncong 0$ (שניהם קומפקטיים, קשירים...)
- הוכיחו ש $8$ לא הומיאומורפי עם "העקומה" +
- למיין עד כדי הומיאומורפיזמים:

א) את כל "הספרות"

1234567890

ב) האלף-בית האנגלי

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

(עבור sans serif font "ללא קישוטים, ללא עובי" אותיות וגם הספרות)

**<u>תרגיל</u>**: הוכיחו שכל הכדורים ב $(\mathbb{Z}, d_p)$ הם הומיאומורפיים.

הערה: כל פונקציה לינארית בין מרחבים אוקלידיים

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A_f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

היא רציפה (ליפשיץ – $k = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}$ ), כאשר $A_f$ מטריצה של $f$

$$\Downarrow$$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ לינארית הפיכה ($\det(A_f) \neq 0$). אזי $f$ הומיאומורפיזם.

# הרצאה 8

**<u>הגדרה</u>**: (**אוטומורפיזמים**)

- ***חבורת הומיאומורפיזמים*** של מ"ט

$X \in TOP$, $Homeo(X) := \{X \xrightarrow{f} X \text{ הומיאומורפיזמים}\}$ חבורה לגבי ההרכבה

- ***חבורת איזומטריות*** של מ"מ

$X = (X,d) \in Metr$, $Iso(X) := \{(X,d) \to (X,d) \text{ איזומטריות}\}$

**שימו לב:** אם $\tau = top(d)$ אז $\mathrm{Iso}(X,d)$ תת חבורה של $\mathrm{Homeo}(X,\tau)$.

$$Iso(X) \le Homeo(X) \underbrace{\le}_{\text{ת"ח}} \underbrace{(S_X,\circ)}_{\text{חבורה סימטרית}}$$

**<u>הגדרה</u>:** נגדיר פעולה טבעית $\quad Homeo(X) \times X \to X \quad (f,x) \longmapsto f(x)$

מחלקות שקילות $[x] = \{f(x) \in X \mid f \in Homeo(X)\}$ אורביטה (מסלול) של $x$.

**<u>הגדרה</u>:** אומרים ש $X$ הוא **מ"ט הומוגני** $(homogeneous)$ אם יש רק מסלול 1.

שקול: $\forall\, x, y \in X, \exists f \in Homeo(X): f(x) = y$

זאת תכונה טופולוגית. זאת אומרת נשמרת ע"י הומיאומורפיזמים.

<u>דוגמה</u>: כל מ"ט דיסקרטי הוא הומוגני. כאן $Homeo(X, \tau_{discr}) = S_X$ ?

<u>דוגמה</u>: $X = (0,2)$ מ"ט הומוגני.

אחד מההסברים: $(0,2) \simeq \mathbb{R}$ ו $\mathbb{R}$ הומוגני.

<u>דוגמה</u>: אם $X = [0,1) \cup \{3\}$. אז לא הומוגני. יש 3 מסלולים הבאים:

$$[3] = \{3\}, \quad [0] = \{0\}, \quad [\tfrac{1}{2}] = (0,1)$$

**<u>הגדרה</u>:** באופן דומה מגדירים מ"מ $(X,d)$ הומוגני

(אם לפעולה $Iso(X) \times X \to X$ יש מסלול אחד).

<u>דוגמה</u>: $\mathbb{R}^n$, מרחב נורמי, $S_n$, $(\mathbb{Z}, d_p)$ מ"מ הומוגניים (לכן גם הומוגני כמ"ט).

דוגמה: $X = (-1,1)$ אז הוא הומוגני כמרחב טופולוגי אבל לא כמ"מ

(שימו לב: כאן $Iso(X)$ בעל שני איברים בלבד: פונקצית זהות ושיקוף).

**<u>תרגיל</u>:** כמה מסלולים קיימים בפעולה של $Homeo(x)$ על $X$ אם:

א) $X = (3, \infty)$

ב) $X = [0,1]$

ג) $X = 8$

ד) $X = (0,1) \cup (2,4) \cup \{7\}$.

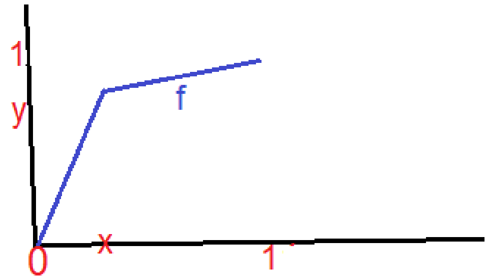
**תשובה:**

א) מסלול 1 (הומוגניות!).  $\mathbb{R} \simeq (3,\infty)$  ו - $\mathbb{R}$ הומוגני (הזזות).

ב) 2 מסלולים. $[0] = \{0,1\} = [1]$  $\left[\frac{1}{2}\right] = \{x|0 < x < 1\}$

**רמז:** לא קיים $h \in Homeo([0,1])$ כך ש $0 < x < 1$ , $h(0) = x$ .

כי $x$ נק' מחלקת עבור $[0,1]$ ו- 0 לא.




f(x)=y

$\forall 0 < x < y < 1 \quad \exists f \in Homeo([0,1]) \quad f(x) = y$

שיקוף $\exists f \in Homeo([0,1]) \quad f(0) = 1$

ג) 2 מסלולים. מדוע ?

ד) 2 מסלולים. מדוע ?

## בסיס לטופולוגיה

נגדיר סימונים חדשים. נניח $\gamma \subseteq P(X)$ (אוסף תת קבוצות ב $X$). נגדיר:

- $\gamma^{\cup} := \{\cup\{B : B \in \beta\} \mid \beta \subseteq \gamma\}$ (כל מיני איחודים דרך איברים של $\gamma$)
- $\gamma^{\cap F} := \{\cap\{B : B \in \beta\} \mid \beta \subseteq \gamma, \beta \text{ is } finite\}$ (חיתוכים סופיים דרך איברים של $\gamma$)

תמיד: $\gamma \subseteq \gamma^{\cap F}$  $\gamma \subseteq \gamma^{\cup}$  $\varnothing \in \gamma^{\cup}$  $\varnothing \in \gamma^{\cap F}$ (ניקח $\beta$ קבוצה ריקה)

למשל אקסיומות טופולוגיה אפשר לכתוב כך:

$(t_1)$ $\varnothing, X \in \tau$  $(t_2)$ $\tau^{\cap F} = \tau$  $(t_3)$ $\tau^{\cup} = \tau$ .

**__הגדרה:__** (בסיס *basis*) יהי $(X,\tau)$ מ"ט. $\tau \subseteq \gamma$ נקרא **בסיס** (לטופולוגיה $\tau$) אם כל קבוצה פתוחה (לא ריקה) שווה לאיחוד איברים מ $\gamma$ –.

**__הערה:__** (הגדרה שקולה) התנאים הבאים שקולים:

1. $\gamma$ בסיס לטופולוגיה $\tau$.
2. $\gamma^{\cup} = \tau$.
3. $\gamma \subseteq \tau$ ולכל $O \in \tau$ ולכל $a \in O$ קיים $G_a \in \gamma$ כך ש $a \in G_a \subseteq O$ .

**הגדרה:** נניח $(X,\tau)$ מ"ט. $\alpha \subseteq \tau$ נקרא Pre-base פרה-בסיס

(אומרים גם תת-בסיס subbase)

אם $\alpha^{\cap F}$ הוא בסיס ל $\tau$

שקול: $(\alpha^{\cap F})^{\cup} = \tau$

**הגדרה:** אומרים ש - $(X,\tau)$ **בעל תכונת מנייה שנייה** $(second\ countable)$ ונסמן:

$(X,\tau) \in B_2$

אם קיים **בסיס** $\gamma$ **בן מנייה**.

**דוגמאות** של בסיס טופולוגי: (תשתמשו בהגדרה (3))

- ב $X=\mathbb{R}$ $\gamma_1=\{(a,b) \mid a<b\}$ וגם $\gamma_2=\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ בסיסים.
  $\gamma_3=\{(a,\infty),(-\infty,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ **פרה-בסיס** אבל לא בסיס.
- ב $X=\mathbb{R}^2$
  א. $\gamma_0$={עיגולים פתוחים}
  ב. $\gamma_1=\{(a,b)\times(c,d)\}$={"מלבנים" פתוחים}
  ג. $\gamma_2$={ריבועים פתוחים} $\gamma_3$={משולשים פתוחים}
  ד. $\gamma_4$={עיגולים פתוחים עם מרכזים בנקודות "רציונליות"}
  ה. $\gamma_5$={משולשים פתוחים שווה צלעות}
- $\mathbb{R}^n \in B_2$

$\gamma_4=\{$כדורים פתוחים עם מרכזים בנקודות "רציונליות" ורדיוסים $\frac{1}{k}\}$ בן מניה !

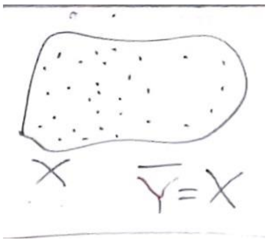
- ב $(\mathbb{R},\tau_s)$ (Sorgenfrey Line) כאשר בקבוצה $\mathbb{R}$ מוגדרת טופולוגיה הבאה

$$\tau_s := \{O \subseteq \mathbb{R} : x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon > 0\, [x,x+\varepsilon) \subseteq O\}$$

אז $\gamma=\{[a,b) \mid a<b\}$ בסיס. תבדקו שכל $[a,b)$ היא קבוצה **סגורה** ב $(\mathbb{R},\tau_s)$.

- לכל $(X,d)$ "כדורים פתוחים" בסיס לטופולוגייה $top(d)$.
  א. $\gamma := \{B_r(a)\}_{\substack{a\in X\\ r>0}}$ $\gamma^{\cup}=top(d)$ (ראו משפט: "כדורים בסיס").
  ב. גם $\gamma_1 := \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{\substack{a\in X\\ n\in\mathbb{N}}}$ מהווה בסיס.

**<u>טענה</u>**: (תרגול) לכל $(X,d)$ ולכל $\bar{Y}=X$ (כלומר $Y$ צפוף ב$X$) $\gamma_2 \coloneqq \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{\substack{a\in Y\\ n\in\mathbb{N}}}$ מהווה בסיס ל $top(d)$.




**<u>תוצאה חשובה:</u>** אם מרחב מטרי $(X,d)$ הוא ספרבילי אז הוא גם $B_2$.

$$(X,d)\in B_2 \Leftarrow (X,d)\in Sep$$

**<u>טענה</u>**: הוכיחו ש $B_2$ תכונה <u>תורשתית</u>.

רמז: תבדקו שאם $\gamma$ בסיס ל $(X,\tau)$ ו $Z\subseteq X$ תת קבוצה אז $\gamma_Z \coloneqq \{G\cap Z \mid G\in\gamma\}$ בסיס לתת מרחב $(Z,\tau_Z)$.

**<u>טענה</u>**: לכל מרחב דיסקרטי $(X,\tau_{discr})$ אוסף כל הנקודונים $\gamma_0=\{\{x\}\mid x\in X\}$ הוא בסיס ל $(X,\tau_{discr})$. לכל בסיס אחר $\gamma$ מתקיים $\gamma_0\subseteq\gamma$.

הסיקו: $(X,\tau_{discr})\in B_2 \Leftrightarrow |X|\le\aleph_0$ .

למשל: $(\mathbb{R},\tau_{discr})\notin B_2$.

**<u>משפט</u>**: $B_2\subset Sep$.

<u>הוכחה</u>: נניח $\gamma$ בסיס בן מנייה במ"ט $(X,\tau)$. צריך למצוא תת קבוצה צפופה בת מניה.

בה"כ $\gamma\not\ni\varnothing$ . לכל $G\in\gamma$ נבחר נקודה אחת בלבד $y_G\in G$. נגדיר $Y_\gamma \coloneqq \{y_G \mid G\in\gamma\}$

אז $Y_\gamma$ בת מניה (כי $\gamma$ ב"מ) ו $Y_\gamma$ צפופה ב $X$. אכן נוכיח $cl(Y_\gamma)=X$.

לכל $O\in\tau$ ולכל $a\in O$ קיים $G_a\in\gamma$ כך ש $a\in G_a\subseteq O$. לפי הבנייה קיים $y_G\in G_a$

לכן $y_G\in Y_\gamma\cap O\neq\varnothing$.

זה מוכיח שכל נקודה $a\in X$ שייכת לסגור של $Y_\gamma$. ז"א $cl(Y_\gamma)=X$.

☺

**<u>תוצאה 1</u>**: $\boxed{B_2 \cap Metriz = Sep \cap Metriz}$..

**<u>תוצאה 2</u>**: במרחבים מטריזביליים – ספרביליות כן תורשתית.

הסבר: כי $B_2$ תורשתית ...

**<u>טענה</u>**: $l_\infty \notin Sep$ (קיים מרחב בנך לא ספרבילי).

הסבר: $(l_\infty, d_{sup}) \underset{\text{תת מרחב מטרי}}{\hookleftarrow} \underbrace{(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d_\Delta)}_{\text{סדרות בינאריות}}$ לא ספרבילי

(מרחב דיסקרטי ספרבילי אם"ם הוא בן מניה)

**<u>הערה</u>** 1: $B_2 \neq Sep$.

קו סורגנפרי מקיים: $(\mathbb{R}, \tau_s) \in Sep \quad (\mathbb{R}, \tau_s) \notin B_2,$.

**<u>הערה</u>** 2: ספרביליות לא תורשתית (גם בבמרחבים יחסית טובים).

למשל: * "מישור סורגנפרי" $(\mathbb{R}, \tau_s)^2 \in Sep$ אבל יש תת מרחב לא ספרבילי (נלמד).

**<u>טענה</u>**: נניח $X$ קבוצה ו $\gamma$ אוסף תת קבוצות ב $X$. התנאים הבאים שקולים:

1. $\gamma$ בסיס לטופולוגיה מסוימת.
2. א. $X \in \gamma^{\cup}$

   ב. חיתוך של 2 קבוצות מ $\gamma$ אפשר להציג כאיחוד של קבוצות מ $\gamma$.

<u>הערה</u>: ב שקול ל ב*: $x \in C \subseteq A \cap B \quad \forall A, B \in \gamma\ \forall x \in A \cap B\ \exists C \in \gamma$

ב* שקול ל ב**: $\gamma^{\cap_F} \subseteq \gamma^{\cup}$.

**<u>הוכחה</u>**: נגדיר אוסף $\tau := \gamma^{\cup}$. מ"ל $\tau$ טופולוגיה.

$(t_1) \quad \varnothing, X \in \tau$

הסבר: $X \in \tau$. בגלל תנאי א. תנאי $\varnothing \in \tau$ נובע מהתכונה הנ"ל על $\gamma^{\cup}$.

$(t_2) \quad \tau^{\cap_F} = \tau$

הסבר: $\tau^{\cap_F} = (\gamma^{\cup})^{\cap_F} = (\gamma^{\cap_F})^{\cup} \subseteq (\gamma^{\cup})^{\cup} = \gamma^{\cup} = \tau$.

$(t_3) \quad \tau^{\cup} = \tau$

הסבר: $\tau^{\cup} = (\gamma^{\cup})^{\cup} = \gamma^{\cup} = \tau$.

☺

**הערה: מקרה פרטי חשוב לתנאי ב** בטענה הוא "סגירות לגבי חיתוכים סופיים" ($\gamma^{\cap_F} = \gamma$)

נשתמש בנושא של מכפלות טופולוגיות.

**דוגמה:** $\gamma := \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$

$a_3 := \max\{a_1,a_2\}, b_3 := \min\{b_1,b_2\} \quad [a_1,b_1) \cap [a_2,b_2) = [a_3,b_3)$

לכן $\gamma^{\cap_F} = \gamma$.

## בסיס מקומי

**<u>הגדרה</u>:** $\beta \subseteq N(a)$ נקרא **בסיס מקומי** בנקודה $a$, אם לכל $U \in N(a)$ קיים $V \in \beta$ כך ש $V \subseteq U$.

**<u>הגדרה</u>:** אומרים ש- $(X,\tau)$ **בעל תכונת מנייה ראשונה**, ונסמן: $(X,\tau) \in B_1$ אם לכל נקודה $a \in X$ קיים בסיס מקומי בן מנייה.

**<u>דוגמה</u>:** לכל $(X,d)$ דוגמאות לבסיס מקומי בנקודה $a$

$\beta_1 := \{B_r(a)\}_{r>0} \quad \beta_2 := \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ בן מנייה ! $\quad \beta_3 := \{B[a,\tfrac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}\}$

**<u>תוצאה</u>:** $Metriz \subset B_1$

**<u>דוגמה</u>:** $(X,\tau_{discr}) \in \mathrm{B}_1$.

הסבר נוסף : לכל $a \in (X,\tau)$ היא נקודה מבודדת אם"ם נקודון $\alpha := \{a\}$ הוא בסיס מקומי.

<u>ערה</u>:

- מספיק לבדוק רציפות פונקציה דרך בסיס.
- מספיק לבדוק רציפות בנקודה עבור סביבות מבסיס מקומי.

- מספיק לבדוק התכנסות סדרות עבור סביבות מבסיס מקומי

**תרגיל:** $B_1$ תכונה תורשתית.

**טענה:** $B_2 \subset B_1$

הסבר: נניח $\gamma$ בסיס בן מנייה במ"ט $(X,\tau)$. לכל $a \in X$ נגדיר $\gamma_a := \{A \in \gamma \mid a \in A\}$.

אז $\gamma_a$ בסיס מקומי בנקודה $a$.

**דוגמה:** $B_2 \neq B_1$ $\qquad \begin{cases} (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \in B_1 \\ (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \notin B_2 \end{cases}$

**הערה:** $Discrete \subset Metriz \subset B_1$

$Metriz \cap Sep \subset B_2 \subset B_1$

**הגדרה:** $\mathbf{dim}(X) = 0 \overset{def}{=}$ קיים בסיס $\gamma$ לטופולוגיה כך שכל $A \in \gamma$ קבוצה סגוחה .

**הגדרה כללית:** ***Menger–Urysohn*** (ראו גם עבודת סמינר לסטודנטים)

עבור מרחבים עם $X \in T_3$ מגדירים:

- $\dim(\varnothing) = -1$
- $\dim X \le 1$ אם קיים בסיס $\gamma$ כך ש $\dim \partial(A) \le 0 \quad \forall A \in \gamma$.
- $\dim X \le n+1$ אם קיים בסיס $\gamma$ כך ש $\dim \partial(A) \le n \quad \forall A \in \gamma$.

הערה: מסמנים יותר ב $ind\, X$ (*inductive dimension*).

**דוגמאות:** $\dim \mathbb{R}^n = \dim S_n = n$ ....

**משפט:** אם $X \in T_1$ וגם $\dim(X) = 0$ אז - $X \in T_{3\frac{1}{2}}$.

הוכחה: נניח $a \in X, a \notin B, cl(B) = B$.

על מנת לבדוק $X \in T_{3.5}$ צ"ל קיימת הפרדה פונקציונלית של $a$ ו $B$.

$a \in B^c \in \tau$. לכן לפי הגדרת מימד אפס (ושל בסיס) קיימת קבוצה סגוחה $O$ כך ש $a \in O \subseteq B^c$

$O \subset X$ קב' סגוחה אזי $f: X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in O \\ 1, & x \notin O \end{cases}$

רציפה! (4 מקרים .... ראינו הוכחה דומה).

ברור שהפונקציה מפרידה $a$ ו $B$.

☺

**<u>טענה</u>**: אם $\dim X = 0, X \in T_1$ אז $X$ בלתי קשיר לחלוטין.

<u>הוכחה:</u> תשתמשו ברעיון של המשפט הקודם. לכל תת קבוצה $A \subseteq X$ ששונה מנקודון קיימת פונקציה רציפה $f: A \to \{0,1\}$ **על**. לכן $A$ לא קשירה.

☺

**<u>דוגמאות:</u>**

א. $\dim(X, \tau_{discr}) = 0$

$\tau_{discr}$ בסיס לעצמו ומוכב מקבוצות סגוחות.

ב. $\dim(\mathbb{Q}) = 0$.

$\gamma \coloneqq \{(a,b) \cap \mathbb{Q} | a, b \in \mathbb{Q}^c\}$ בסיס שמורכב מקבוצות סגוחות.

ג. $\dim(\mathbb{Z}, d_p) = 0$.

כל כדור הוא סגוח ב $(\mathbb{Z}, d_p)$ (בעצם גם בכל מרחב אולטרהמטרי)

ד. $\dim(\mathbb{R}, \tau_S) = 0$ Sorgenfrey line

תזכורת: $O \in \tau_S \overset{def}{=} x \in O \Rightarrow \exists\, \epsilon = \epsilon_x > 0: [x, x + \epsilon_x) \subset O$.

**<u>תכונות קו סורגנפריי:</u>** $(\mathbb{R}, \tau_s)$ $\tau_s \coloneqq \{O \subseteq \mathbb{R} : x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon > 0\, [x, x+\varepsilon) \subseteq O\}$

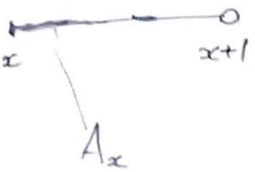
- $(\mathbb{R}, \tau_s) \in T_2$

$\gamma \coloneqq \{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ בסיס ($\gamma^{\cup} = \tau_s$) $O = \bigcup_{x \in O} [x, x + \epsilon_x)$.

- א. $\tau \neq \tau_s$ ב. $\tau \subset \tau_S$.
$(a,b) = \cup\{[x, x+\varepsilon_x) \mid x \in (a,b)\} \in \tau_s$

- $(\mathbb{R},\tau_s)\in B_1$ $\quad\{[a,a+\frac{1}{n}):n\in\mathbb{N}\}\subset N_{\tau_s}(a)$ בסיס מקומיבן מניה
- $(\mathbb{R},\tau_s)\in Sep$ $\quad cl_{\tau_s}(\mathbb{Q})=\mathbb{R}$
- **<u>טענה</u>**: $(\mathbb{R},\tau_s)\notin B_2$

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה שקיים בסיס $\gamma\subset\tau_s$ כך ש $\gamma$ בן מנייה.




$[x,x+1)\in\tau_s$ פתוחה, לכן הוא שווה לאיחוד איברים מבסיס $\gamma$.

אז קיים $A_x\in\gamma$ כך ש - $x\in A_x\subset[x,x+1)$.

נבחר $A_x$ כזה ונגדיר העתקה $\quad x\longmapsto A_x \quad \mathbb{R}\xrightarrow{\varphi}\gamma$

$\varphi$ חח"ע $(x\neq y\Rightarrow A_x\neq A_y)$.

$$2^{\aleph_0}=\aleph=|\mathbb{R}|=|\varphi(\mathbb{R})|\leq|\gamma|$$

מכאן $|\gamma|\geq 2^{\aleph_0}>\aleph_0$, לכן $\gamma$ לא בת מנייה!

- $(\mathbb{R},\tau_s)\notin Metriz$ $\quad$ (כי הוא ספרבילי ללא $B_2$)
- $\dim(\mathbb{R},\tau_s)=0$ . $\quad$ בסיס $\gamma$ מורכב מקבוצות סגוחות. $\Leftarrow$
- $(\mathbb{R},\tau_s)\in T_{3\frac{1}{2}}$ (נובע מהתכונה הקודמת והמשפט שהוכחנו).

## קשר בין עקרון *Heine* ותכונת $B_1$

**<u>הגדרה:</u>** אומרים שמ"ט $X$ הוא בעל **תכונת $FU$** $(Frechet-Urysohn)$ אם:

$$\forall\, A\subseteq X:\ \ scl(A)=cl(A)$$

**<u>הערה:</u>** $Metriz\subset B_1\subset FU$

**<u>הערה:</u>** למדנו דוגמה של מ"ט שהוא לא *FU*.

**<u>טענה:</u>** $B_1\subseteq FU$.

הוכחה מקוצרת: שימו לב שאם $X\in B_1$ אז לכל נקודה יש בסיס מקומי בן מנייה

$\alpha=\{U_n:n\in\mathbb{N}\}$ <u>מונוטוני</u> (ז"א $U_{n+1}\subseteq U_n$). אפשר "לתקן כל בסיב מקומי בן מנייה (חיתוכים סופיים רקורסיסית) לקבלת בסיס מקומי מונוטוני.

ואז ההמשך דומה למקרה של מ"מ ...

# הרצאה 9

**<u>משפט</u> (עיקרון $\boldsymbol{Heine}$ מתוקן):** נניח $(Y,\sigma) \xrightarrow{f} (X,\tau)$ פו' בין מ"ט. נניח ש - $(X,\tau) \in FU$ (למשל: $(X,\tau) \in B_1$ ) אין הגבלה על $Y$. אז התנאים הבאים שקולים:

(1) $f$ רציפה.

(2) $f$ שומרת על התכנסות (ז"א $f(scl(A) \subseteq scl(f(A))$ ).

**<u>הוכחה:</u>** $(1) \Leftarrow (2)$: תמיד (ממשפט $\frac{1}{2}$Heine).

$(2) \Leftarrow (1)$:

$$f\big(cl(A)\big) \underbrace{=}_{X \in FU} f\big(scl(A)\big) \underbrace{\subseteq}_{\text{נתון}} scl\big(f(A)\big) \underbrace{\subseteq}_{\text{תמיד מתקיים}} cl\big(f(A)\big)$$

☺

**<u>תוצאה:</u>** עיקרון $Heine$ נכון עבור קו $Sorgenfrey$ $(Y,\sigma) \xrightarrow{f} (\mathbb{R},\tau_s)$ (כתחום הפונקציה) כי $(\mathbb{R},\tau_s) \in B_1 \subset FU$.

**<u>הערה:</u>** בטופולוגיה, באנליזה ... יש צורך אמיתי ב"סדרות מוכללות":

$(M,\preccurlyeq)$ קבוצה <u>סדורה חלקית</u> **מכוונת** (לכל $\forall a,b \in M\ \exists c \in M\ a \le c, b \le c$ ).

סדרה מוכללת או רשת ( [generalized sequence or net](generalized sequence or net) ) היא פונקציה $(M,\preccurlyeq) \xrightarrow{f} X$ (סדרה רגילה: $(\mathbb{N},\le) \xrightarrow{f} X$).

<u>דוגמה חשובה</u>: כל בסיס מקומי $\beta$ (לנקודה $a$ ) דוגמה לקבוצה סדורה מכוונת.

אם לכל $V \in \beta$ נבחר באיבר $x_V \in V$ אז נקבל $\lim\{x_V : V \in \beta\} = a$.

דרך רשתות אפשר לתת תיאור של $cl(A)$.

$z \in cl(A) \Leftrightarrow z$ גבול של סדרה מוכללת

ואז יש הכללת עיקרון $Heine$ ...

<u>שימו לב</u>: למשל **אינטגרלים** זה סוג של גבול (אבל לא גבול רגיל !)

**דרך סדרות מוכללות מסוימות.**

ספר מומלץ: ד. ליבוביץ, טופולוגיה קבוצתית, האוניברסיטה הפתוחה.

*תזכורת:*

**הגדרה:** נניח $(X,\tau)$ מ"ט. $\alpha\subseteq\tau$ נקרא פרה-בסיס (אומרים גם תת-בסיס) אם

$\alpha^{\cap F}$ הוא בסיס ל $\tau$    <u>שקול:</u> $(\alpha^{\cap F})^{\cup}=\tau$

**דוגמאות:**

1) כל בסיס הוא פרה-בסיס.

2) א) $X=\mathbb{R}$ $\alpha:=\{(-\infty,b),(a,\infty)\}$ . $a,b\in\mathbb{R}$ (או $a,b\in\mathbb{Q}$).

$\alpha$ פרה– בסיס אבל לא בסיס! $\underbrace{\gamma=\{(a,b)\}}_{\text{בסיס ל}-\mathbb{R}}\subset\alpha^{\cap_2}\subset\alpha^{\cap F}$

**הגדרה:** לכל קבוצה **סדורה ליניארית** $(X,\leq)$ אפשר להגדיר

$\tau_{\leq}$ "interval topology"

עם פרה-בסיס $\alpha:=\{(-\infty,b),(a,\infty)\mid a,b\in X\}$ $\tau_{\leq}=(\alpha^{\cap F})^{\cup}$

ב) $X=\mathbb{R}^2$. $\alpha=\{(a,b)\times\mathbb{R},\mathbb{R}\times(c,d)\}$

כאשר $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ (או $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$) הוא פרא-בסיס.

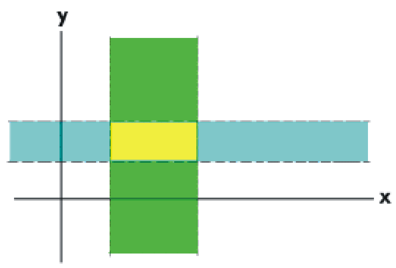



**Fig. 2**

**טענה:** נניח $X,Y\in TOP$ ונתונה פונקציה $f:X\to Y$.

$\alpha\subset\tau_Y$ פרה-בסיס. אז התנאים הבאים שקולים:

1. $f$ רציפה.
2. $\forall U\in\alpha: f^{-1}(U)\in\tau_X$.

**הסבר:**

<u>$(1)\Leftarrow(2)$:</u> בגלל קריטריון 2 של הרציפות.

<u>$(2)\Leftarrow(1)$:</u> צ"ל $\forall O\in\tau_Y: f^{-1}(O)\in\tau_X$.

מצד שני, $\alpha$ תת בסיס ל $\tau_Y$, לכן $O\in\tau_Y=(\alpha^{\cap F})^{\cup}$

$f^{-1}(O)\in\tau_X$ כי ה"מקור" שומר על $\cap_F$ וגם על $\cup$.

■

**<u>תוצאה</u>:** התנאים הבאים שקולים :

1. $f: X \to \mathbb{R}$ רציפה.
2. $f^{-1}(-\infty, b), f^{-1}(a, \infty)$ פתוחות לכל $a, b \in \mathbb{Q}$ (או $a, b \in \mathbb{R}$).

**<u>הסבר</u>:** דוגמה 2א + הטענה.

■

**<u>טענה</u>:** נניח $\alpha \subset P(X)$ כך ש $\alpha$ כיסוי ל $X$. אז $\alpha$ הוא פרא-בסיס לטופולוגיה $\tau := (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$.

**<u>הסבר</u>:**

$(t_1)$ $\emptyset \in \tau$ , $X \in \alpha^{\cup}$ (כי נתון ש $\alpha$ – כיסוי).

$(t_2)$ $\tau^{\cap_F} = ((\alpha^{\cap_F})^{\cup})^{\cap_F} = ((\alpha^{\cup})^{\cap_F})^{\cap_F} = (\alpha^{\cup})^{\cap_F} = (\alpha^{\cap_F})^{\cup} = \tau$

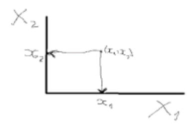
$(t_3)$ $\tau^{\cup} = ((\alpha^{\cap_F})^{\cup})^{\cup} = (\alpha^{\cap_F})^{\cup} = \tau$.

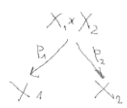
■

# <u>מכפלה טופולוגית (מס' סופי של הגורמים)</u>

$(X_1, \tau_1)$, $(X_2, \tau_2)$ מ"ט. איך מגדירים "טופולוגיה טבעית" על

$$X = X_1 \times X_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\} = \prod_{i \in \{1,2\}} X_i \qquad (X_1 \times X_2, \tau_{\prod} = ?)$$




כללי יותר: $\tau_{\prod} = ?$ על $X = X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in X_i\} = \prod_{i \in \{1,\cdots,n\}} X_i$

<u>רעיון:</u> מגדירים <u>טופולוגית מכפלה</u> כטופולוגיה הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של **<u>הטלות</u>**

$$p_k : \prod_{i \in \{1,\cdots,n\}} X_i \to X_k \qquad p_k(x_1, \cdots, x_n) = x_k$$

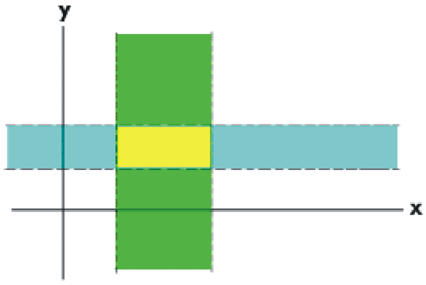



Fig. 2

$$\{(x_1,x_2)\in X_1\times X_2 | x_1\in O_1\} = p_1^{-1}(O_1) = O_1\times X_2$$

$$p_2^{-1}(O_2) = X_1\times O_2$$

$$(O_1\times X_2)\cap(X_1\times O_2) = p_1^{-1}(O_1)\cap p_2^{-1}(O_2) = \underbrace{O_1\times O_2}_{\text{"מלבן פתוח"}}$$

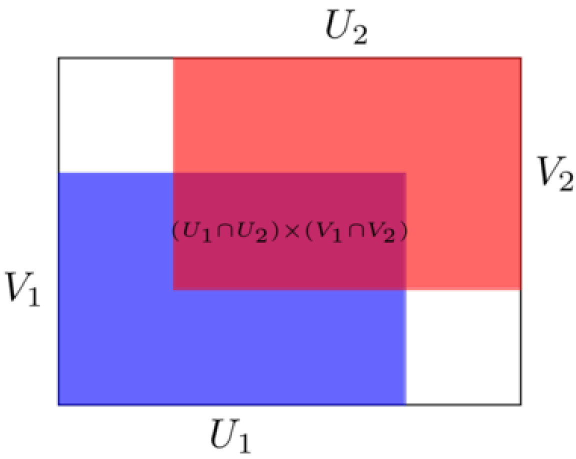
$O_1\times X_2$, $X_1\times O_2$ חייבים להיות מתוך טופולוגיה $\tau_\pi$ על $X_1\times X_2$ על מנת להבטיח את הרציפות.

אז גם חיתוך (סופי) $O_1\times O_2\in\tau_\pi$.

**<u>הגדרה:</u>** $\gamma:=\{O_1\times\cdots\times O_n \mid O_i\in\tau_i\}$ "תיבות בסיסיות"

("מלבנים פתוחים" $\gamma:=\{O_1\times O_2 \mid O_1\in\tau_1, O_2\in\tau_2\}$ במקרה של $n=2$)

מקיים את התנאים: $\gamma^{\cap_F}=\gamma, X\in\gamma$




$$(U_1\times V_1)\cap(U_2\times V_2)=(U_1\cap U_2)\times(V_1\cap V_2)$$

לכן (לפי הטענה) $\gamma$ בסיס לטופולוגיה מסוימת $\gamma^{\cup}$. נגדיר

$$\tau_\Pi=\gamma^{\cup}$$

שקול: $O_1\times\cdots\times O_n\subseteq O \quad O\in\tau_\Pi \Leftrightarrow (x_1,\cdots,x_n)\in O\Rightarrow\exists O_i\in \mathrm{N}(x_i)$

**משפט:** $X=(\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i,\tau_{\Pi})$ מ"ט ו $\tau_{\Pi}$ הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות

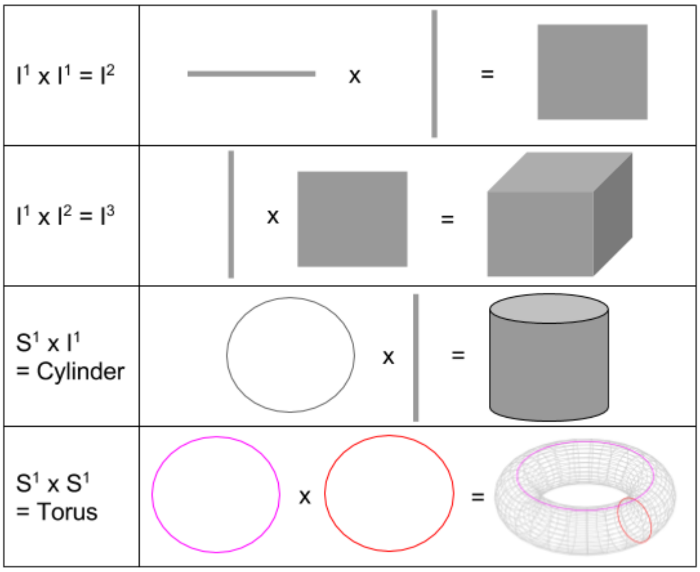
$$\mathrm{p}_i:(\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} \mathrm{X}_i,\tau_{\Pi})\to(\mathrm{X}_i,\tau_i)\quad (x_1,\cdots,x_n)\mapsto x_i$$

**בסיס סטנדרטי** $\gamma:=\{O_1\times\cdots\times O_n \mid O_i\in\tau_i\}$ "תיבות בסיסיות". $\tau_{\Pi}=\gamma^{\cup}$.

**פרה-בסיס סטנדרטי** $\alpha:=\{\mathrm{p}_i^{-1}(O_i)=\mathrm{X}_1\times\cdots\times O_i\times\cdots\times X_n \mid O_i\in\tau_i\}$ "תיבות אלמנטריות"

אז

$$\alpha^{\cap_F}=\gamma\quad \tau_{\Pi}=(\alpha^{\cap_F})^{\cup}$$




טורוס $n$-ממדי $S_1{}^n=S_1\times\cdots\times S_1\simeq T^n$

הוא בעל מימד $n$ קומפקטי (לכן לא הומיאומורפי ל $\mathbb{R}^n$) אבל לכל נקודה יש סביבה שהומיאומורפית ל $\mathbb{R}^n$ (ז"א $T^n$ **לוקלית** הומיאומורפי ל $\mathbb{R}^n$).

מ"ל עבור $n=1$ (מדוע ?)

**מספר תכונות:**

- אם $\gamma_1$ בסיס של $X_1$ ו $\gamma_2$ בסיס של $X_2$ אז

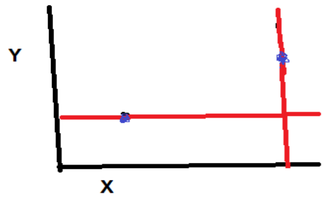
$\gamma_1\times\gamma_2 := \{O_1\times O_2 : O_1\in\gamma_1, O_2\in\gamma_2\}$ בסיס של $X_1\times X_2$.

- אם $\alpha_1$ בסיס לוקלי של $X_1$ **בנקודה** $x_1$ ו $\alpha_2$ בסיס לוקלי של $X_2$ **בנקודה** $x_2$ אז $\alpha_1\times\alpha_2 := \{U_1\times U_2 : U_1\in\alpha_1, U_2\in\alpha_2\}$ בסיס לוקלי של $X_1\times X_2$ **בנקודה** $(x_1,x_2)$.
- אם $A_1$ צפוף ב $X_1$ ו $A_2$ צפוף ב $X_2$ אז $A_1\times A_2$ צפוף ב $X_1\times X_2$.
- $\{a\}\times X_2\simeq X_2 \quad X_1\times\{b\}\simeq X_1 \quad \forall a\in X_1, b\in X_2$

**תרגילים מומלצים**: (אם יהיה קשה ראו כאן (selected exercises

1. $X\times Y\in B_2 \Leftrightarrow X,Y\in B_2$
2. $X\times Y\in B_1 \Leftrightarrow X,Y\in B_1$
3. $X\times Y\in Sep \Leftrightarrow X,Y\in Sep$
4. $X\times Y\in Conn \Leftrightarrow X,Y\in Conn$

רמז דרך התמונה:




הערה: תכונה טופולוגית נקראת "כפלית סופית" אם היא נשמרת לגבי מכפלה טופולוגית סופית.

5. $X\in T_2 \Leftrightarrow \Delta := \{(x,x) : x\in X\}$ סגור במרחב מכפלה $X\times X$.
6. אם $Y\in T_2$ ו $f : X\to Y$ רציפה אז הגרף $Gr(f)$ סגור ב $X\times Y$.

שאלה: האם יש קשר בין שני התרגילים הקודמים ?

7. לכל פונקציה רציפה $X\xrightarrow{f}Y$ מתקיים ש

$$X\simeq \underbrace{Gr(f) := \{(x,f(x))|x\in X\}}_{\text{תת מרחב טופולוגי}}\subset X\times Y.$$

8. * Sorgenfrey plane $X := (\mathbb{R},\tau_s)\times(\mathbb{R},\tau_s)$ ספרבילי אבל מכיל תת מרחב לא ספרבילי.
9. $\mathbb{R}\setminus\{0\}\simeq\{1,2\}\times\mathbb{R}$
10. $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\simeq S_1\times\mathbb{R}$

## טופולוגיה של סדר ליניארי

**תזכורת**: נניח $\le$ סדר ליניארי על קבוצה $X$ ו $\tau_{\le}$ טופולוגית הסדר
(עם פרה-בסיס $\alpha := \{(-\infty,b), (a,\infty) : a,b \in X\}$. ז"א $(\alpha^{\cap F})^{\cup} = \tau_{\le}$)

**דוגמה**: למשל טופולוגיה של $\mathbb{R}$ או $[0,1]$ (או בעצם כל קטעים ב $\mathbb{R}$).

**אזהרה**: טופולוגית תת מרחב במרחב סדור ליניארי לא תמיד שווה לטופולוגיה של סדר מצומצם. למשל: $X := \mathbb{R}$ $Y := [0,1) \cup \{2\}$.

## <u>תרגילים:</u>

11. הוכיחו:

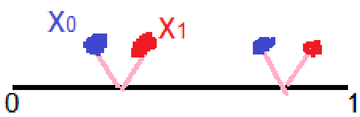
א. $(X,\tau_{\le}) \in T_2$

ב. יחס הסדר $\{(x,y) \in X \times X : x \le y\}$ סגור במרחב מכפלה $X \times X$.

ג. אם $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \le y_n, \lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y$
אזי $x \le y$.

12. (**שאלת אתגר**) בקבוצה $X := [0,1]\times\{0,1\}$ נגדיר Lexicographic Order

$$(a,b) \le_L (c,d) \Leftrightarrow a < c \quad or \quad a = c, b \le d$$




נדמיין "שהחלפנו" כל נקודה $x \in [0,1]$ בשתי נקודות $x_0, x_1$ עם הסדר $x_0 < x_1$
(כאשר מסמנים $x_0 := (x,0),\ x_1 := (x,1)$)

הוכיחו:

א. $(X,\tau_{\le_L}) \in Sep \cap B_1 \cap T_2$.

ב. נקודות $(0,0), (1,1)$ הן מבודדות.

ג. $(X,\tau_{\le_L})$ מכיל תת מרחב $Y := (0,1)\times\{1\}$ שהומיאומורפי לקו סורגנפרי.

ד. $(X,\tau_{\le_L})$ לא מטריזבילי.

**הערה 1.**: למרחב $([0,1]\times\{0,1\}, \tau_{\le_L})$ יש שמות שונים בספרות:

double arrow, split interval (לעיתים "מורידים" נקודות מבודדות $(0,0)$, $(1,1)$ )

**הערה 2.**: קיימות הכללות מעניינות וחשובות באישומים.

למשל: נניח $(K,\le)$ רבוצה עם סדר ליניארי. לכל תת קבוצה $A \subseteq K$ אפשר להגדיר

קבוצה סדורה לנארית חדשה $K_A := K\times\{0\}\cup A\times\{1\}$ עם **סדר לקסיקוגרפי**.

אינטויטיבת זה המצב שמפצלים נקודות רק מהקבוצה $A$.

למשל: תבדקו שאם ניקח קבוצה סדורה $[0,1]_{\{\frac{1}{2}\}}$ (מפצלים רק נקודה אחת $\frac{1}{2}\in[0,1]$) אז נקבל מרחב טופולוגי הומיאומורפי ל ("סכום" של שני קטעים סגורים)

**הגדרה:** נניח $(G,\cdot)$ חבורה ו - $(G,\tau)$ מ"ט.

אומרים ש - $(G,\cdot,\tau)\in TGr$ חבורה טופולוגית ($Topological\ Group$) אם מתקיימים:

א. "כפל" $(a,b)\longmapsto a\cdot b \quad G\times G\xrightarrow{\cdot}G$ פונקציה רציפה.

(שקול: $\forall a_1,a_2\in G\ \forall U\in N(ab)\ \exists V_1\in \mathrm{N}(a_1),V_2\in N(a_2)\quad V_1V_2\subseteq U$)

ב. "ההיפוך": $a\longmapsto a^{-1}\quad G\to G$ פונקציה רציפה.

(שקול: $\forall a\in G\ \ \forall U\in N(a)\quad U^{-1}\in N(a^{-1})$)

**דוגמאות:**

- כל מרחב נורמי $(E,\|\cdot\|)$ מגדיר חבורה טופולוגית $(E,+,\tau_{\|\cdot\|})$
- $(\mathbb{Z},+,top(d_p))$
- טורוס $T^n$ חבורה טופולוגית קומפקטית (מה היא הפעולה ? )
- $GL(n,\mathbb{R})$
- כל חבורה בטופולוגיה דיסקרטית

**הערה:** בהגדרת $TGr$ - (א) $\not\Leftarrow$ (ב).

**דוגמה:** $(\mathbb{R},+,\tau_s)$ בטופולוגית סורגנפריי.

**תזכורת:** $\mathbb{R}\supseteq O\in\tau_s \overset{def}{=} \forall x\in O\ \exists\epsilon>0{:}\,[x,x+\epsilon)\subseteq O$

למשל $[0,1)\ \in\tau_s$ פתוחה אבל לא $(-1,0]$ (שהוא מקור של $[0,1)$).

הסבר נוסף: $\lim\frac{1}{n}=0\ but\ \lim(-\frac{1}{n})\neq 0$.

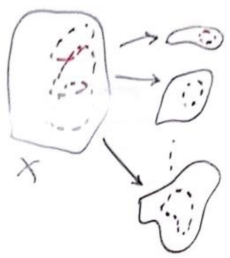
**תרגיל**: נניח $G$ ח"ט. אז כל הזזה ימנית $T_a : G \to G, T_a(x) = xa$
הומיאומורפיזם (ז"א $T_a \in Homeo(G)$ (נכון גם לשמאלית $_aT : G \to G,\ _aT(x) = ax$).
הסיקו שכל ח"ט היא הומוגנית.

**הערה**: על חבורות טופולוגיות ראו באתר http://u.math.biu.ac.il/~megereli/seminar.html

# הרצאה 10

## __הגדרה:__ טופולוגיה חלשה $(Weak\ Topology)$.

נניח $X$ קבוצה. $(X_i, \tau_i) \in TOP$, $i \in I$ מ"ט ונתונה משפחה של פונקציות $X \overset{f_i}{\to} X_i$. אז



קיימת טופולוגיה $\tau_w$ על $X$ כך ש

א. $(X, \tau_w) \overset{f_i}{\to} (X_i, \tau_i)$ רציפות.
ב. בהינתן ש – $\sigma$ טופולוגיה מסוימת על $X$ כך ש
ג. $(X, \sigma) \overset{f_i}{\to} (X_i, \tau_i)$ רציפות מתקיים $\sigma \supseteq \tau_w$

(ז"א $\tau_w$ היא **הכי חלשה כך שמתקיים א'**).

$\tau_w$ נקראת **"טופולוגיה חלשה"**. הגדרה פורמלית:

$\tau_w = (\alpha^{\cap F})^{\cup}$

כאשר $\alpha := \{f_i^{-1}(O_i) \big| O_i \in \tau_i, i \in I\}$.

לפי הבנייה $\alpha$ פרה-בסיס ל - $\tau_w$ ו - $\gamma := \alpha^{\cap F}$ בסיס ל - $\tau_w$.

**דוגמאות** של "טופולוגיה חלשה": מכפלה, תת-מרחב, טופולוגיה נקודתית, טופולוגיה שמוגדרת ע"י משפחת פסאודו-מטריקות, טופולוגיה חלשה במרחבים נורמיים ...

**משפט:** (טופולוגיה חלשה)

נניח $(Y,\sigma)$ מ"ט ונתונה פונקציה $X \xrightarrow{g} Y$.

כמו קודם, $\tau_w$ מסמן טופולוגיה חלשה מעל $X$ לגבי $\underset{i\in I}{(X_i,\tau_i) \xrightarrow{f_i} X}$.

אזי $\underset{i\in I}{(X_i,\tau_i) \xrightarrow{f_i\circ g} Y}$ רציפות $\Leftrightarrow$ $(X,\tau_w) \xrightarrow{g} Y$ רציפה.

**הוכחה:**

($\Rightarrow$): ברור, כי הרכבה שומרת על רציפות.

($\Leftarrow$):

צ"ל $(X,\tau_w) \xrightarrow{g} Y$ רציפה.

ש"ל $\forall O \in \tau_w : g^{-1}(O) \in \sigma$.

מ"ל (על פרה-בסיס $\alpha =$). ז"א כאשר

$$\exists i \in I : f_i^{-1}(O_i) = O \in \alpha$$

$$(f_i \circ g)^{-1}(O_i) = g^{-1}\left(f_i^{-1}(O_i)\right) = g^{-1}(O)$$

פתוחה בגלל רציפות של $f_i \circ g$.

■

**תוצאה:** $\tau_w$ הטופולוגיה הכי חלשה כך ש...

**הסבר:** זה נובע מהמשפט. אם ניקח $(X,\tau_w) \xrightarrow{g=id} X = Y$. מהרציפות נקבל $\sigma \supseteq \tau_w$.

**מקרים פרטיים של טופולוגיה חלשה:**

- **תת מרחב טופולוגי:**

$(X,\tau) \underset{\text{שיכון}}{\overset{i}{\hookleftarrow}} (Y,?)$ ($Y$ תת קבוצה של $X$).

$$\tau_Y = \tau_w$$

שווה לטופולוגית תת מרחב (שכבר הגדרנו !).

שימו לב: $\forall O \in \tau \subseteq X : i^{-1}(O) = O \cap Y$

- **מכפלה טופולוגית של n גורמים** $(X_i,\tau_i)\ \ \mathrm{i}\in\{1,\cdots,\mathrm{n}\}$

$X=(\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i,\tau_\Pi)$ מ"ט ו $\tau_\Pi$ הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות

$$\mathrm{p}_i:(\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} \mathrm{X}_i,\tau_\Pi)\to(\mathrm{X}_i,\tau_i)\quad (x_1,\cdots,x_n)\mapsto x_i$$

מתקיים $\tau_\Pi=\tau_w$ טופולוגית מכפלה כפי שהגדרנו ! $\tau_\Pi=(\alpha^{\cap_F})^{\cup}$

כאשר $\{O_i\in\tau_i\ |\ \mathrm{p}_i^{-1}(O_i)=\mathrm{X}_1\times\cdots\times O_i\times\cdots\times X_n\}=:\alpha$ פרה-בסיס "תיבות אלמנטריות".

- **הגדרה: <u>מכפלה טופולוגית</u> (אין הגבלה)** $(X_i,\tau_i)\ \ \mathrm{i}\in I$

$$X=\left\{I\xrightarrow{x}\bigcup_{i\in I}X_i\,,x(i)\in X_i\right\}=\prod_{i\in I}X_i\xrightarrow{p_i}(X_i,\tau_i)$$

מכפלה קרטזית (כקבוצה). איבר טיפוסי "וקטור מוכלל" $x=(x_i)_{i\in I}$ (פונקציות)

<u>היטלים:</u> $p_{i_0}(x)=x(i_0)=x_{i_0}$

**מגדירים** $\tau_w=\tau_\Pi=(\alpha^{\cap_F})^{\cup}$ כטופולוגיה חלשה (טופולוגית *Tychonoff*).

$\alpha:=\{\mathrm{p}_i^{-1}(O_i)\,|\ O_i\in\tau_i\}$ תיבות אלמנטריות. פרה-בסיס סטנדרטי

$\gamma:=\alpha^{\cap_F}=\{\text{תיבות בסיסיות}\}=\{\bigcap_{j\in J}p_j^{-1}(O_j)\ |\text{סופי } J\subseteq I,O_j\in\tau_j\}$ בסיס סטנדרטי

**הערות על מכפלה קרטזית** $X=\prod_{i\in I}X_i$ **והיטלים** $\prod_{i\in I}X_i\xrightarrow{p_i}X_i$

א. $\mathrm{p}^{-1}{}_i(O_i)=O_i\times\prod_{j\in I\setminus\{i\}}X_j$

ב. $\mathrm{p}_i^{-1}(O_i)\cap\mathrm{p}_k^{-1}(O_k)=O_i\times O_k\times\prod_{j\in I\setminus\{i,k\}}X_j$

ג. $p_k(\bigcap_{i\in J}p_j^{-1}(O_j))=\begin{cases}O_k & if\ \ k\in J\\ X_k & if\ \ k\notin J\end{cases}$

ד. $O \in \tau_{\Pi} \Leftrightarrow x=(x_i)_{i\in I} \in O \Rightarrow \exists\ finite\ J \subseteq I\ \exists O_j \in \tau_j \quad x \in \bigcap_{i\in J} p_j^{-1}(O_j) \subseteq O$

שימו לב: תנאי $x \in \bigcap_{i\in J} p_j^{-1}(O_j)$ שקול ל $x_j \in O_j \quad \forall j \in J$.

- <u>טופולוגיה המוגדרת דרך משפחת פסאודו-מטריקות:</u>

א. <u>תזכורת</u>: אם $\rho$ פסאודו מטריקה מעל קבוצה $X$ אז

$$top(\rho) = \{\text{פתוחות במובן } \rho\} = \{B_\rho(x,r) | x \in X, r > 0\}^{\cup} = \gamma^{\cup}$$

ב. נניח שנתונה משפחה $\{\rho_i\}_{i\in I}$ של פסאודו-מטריקות על אותה קבוצה $X$.

מגדירים $\tau_w(\{\rho_i\}_{i\in I})$ כטופולוגיה חלשה של אוסף הפונקציות הזהות:

$$\left\{X \xrightarrow[i\in I]{id} (X, top(\rho_i))\right\} \qquad (\text{ז"א } \forall i: f_i = id)$$

לכן $\tau_w = (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$

כאשר $\alpha := \{B_{\rho_i}(x,r) |\ x \in X, r > 0, i \in I\}$

"כדורים" פרה-בסיס ל $\tau_w$.

- <u>**טופולוגיה נקודתית**</u> על $X=C[0,1]$ (ניתן להכללות):

עבור $t \in [0,1]$ נגדיר פסאודו-מטריקה $\rho_t(f_1,f_2) = |f_1(t) - f_2(t)|$. נקבל

$$\{\rho_t\}_{t\in[0,1]}$$

$$\downarrow$$

$$\tau_w(\{\rho_t\}_{t\in[0,1]}) =: \tau_p$$

טופולוגיה זו נקראת טופולוגיה נקודתית ($pointwise\ topology$).

<u>הערה:</u> $(C[a,b], \tau_p) \subsetneq top(d_{max})$

המרחב $(C[a,b], \tau_p)$ הוא לא מטריזבילית אבל חשוב באנליזה.

אוסף $\gamma$ קבוצות הבאות :

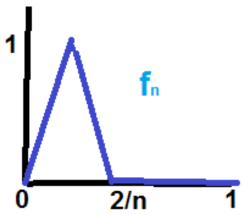
$$\gamma = \{V_{\varepsilon,p_1,p_2,\cdots,p_n}(g): \quad g \in C[a,b], \varepsilon > 0, p_1, p_2, \cdots, p_n \in [a,b]\}$$

$$V_{\varepsilon,p_1,p_2,\cdots,p_n}(g) = \{f \in C[a,b]: |f(p_k) - g(p_k)| < \varepsilon\}$$

הוא בסיס לטופולוגיה $\tau_p$.

הערה: $(C[0,1], \tau_p)$ תת מרחב טבעי של מכפלה טופולוגית (חזקה) $\mathbb{R}^{[0,1]}$.

$\tau_p \neq top(d_{\max})$. למשל סדרת הפונקציות $f_n \in C[0,1]$ הבאה (עם $f_n(\frac{1}{n})=1$ )




מתכנסת בטופולוגיה נקודתית $\tau_p$ לפונקצית האפס $\theta$ (כאשר $\theta(x)=0$ לכל $x \in [a,b]$.

ראו שכל סביבה של $\theta$ מהטיפוס של $\gamma$ מכילה כמעט כל האיברים של הסדרה.

אבל אין התכנסות בטופולוגיה של $top(d_{\max})$ כי $d(f_n,\theta)=1$) (לא שואף לאפסס).

**הגדרה**: $f : X \to Y$ נקרה **שיכון טופולוגי** אם פונקציה מושרת $f : X \to f(X)$ הומיאומורפיזם.

- **טופולוגיה $p$ – אדית**:

$$top(d_p) = \tau_w\left\{\mathbb{Z} \underset{k\mapsto k+p^n\mathbb{Z}}{\overset{f_n}{\longrightarrow}} (\mathbb{Z}_{p^n}, discr) \quad n \in \mathbb{N}\right\}$$

בעצם פונקצית האלכסון $f(x) = (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad f = \Delta_{n\in\mathbb{N}} f_n : (\mathbb{Z}, d_p) \to \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_{p^n}$

מגדיר שיכון טופולוגי בתוך מכפלה טופולוגית.

( $\mathbb{Z}_{p^n} = \{0,1,\cdots,p^n-1\}$ מסמן חבורה ציקלית סופית דיסקרטית עם $p^n$ איברים).

- **טופולוגיה חלשה על מרחב Hilbert** $(l_2, \|.\|)$ היא טופולוגיה המושרית מאוסף של

הפונקציונלים $\{f_a : l_2 \to \mathbb{R} \quad f_a(x) = \langle a, x\rangle : \quad a \in l_2\}$.

הערה: "כדור סגור" $B_r[\theta]$ קומפקטי בטופולוגיה חלשה הנ"ל. לעומת זאת $B_r[\theta]$

לא קומפקטי בטופולוגית מרחב נורמי $(l_2, \|.\|)$ (נלמד !) .

**טענה**: נניח $f_i : Y_i \to X_i$ פונקציות רציפות $\forall i \in I$ .

הוכיחו "שפונקצית המכפלה" $f := \prod_{i\in I} f_i$ הבאה היא רציפה

$$f((y_i)_{i\in I}) = (f_i(y_i))_{i\in I} \qquad f : \prod_{i\in I} Y_i \to \prod_{i\in I} X_i \ .$$

**הוכחה**: הרעיון הוא להשתמש במשפט "טופולוגיה חלשה".

נגדיר $X = \prod_{i\in I} X_i , Y := \prod_{i\in I} Y_i$ . נסמן ההטלות ב $p_i^X , p_i^Y$ . אז יש לנו פונקציה $f : Y \to X$ כך ש $p_i^X \circ f = f_i \circ p_i^Y$ . נתון ש $f_i$ רציפות. לכן גם $f_i \circ p_i^Y$ ששווה ל $p_i^X \circ f$ .לפי המשפט הנ"ל אפשר להסיק ש $f$ רציפה.

☺

**תוצאה**: אם כל גורם $f_i : Y_i \to X_i$ הומיאומורפיזם אז גם $f : Y \to X$ .
$Y_i \simeq X_i \Rightarrow \prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} Y_i \simeq \prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i$ .

**דוגמה**: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z} \simeq (-1,1)\times(0,7)\times(5,\infty)\times\mathbb{N}^2$

**תרגיל**: $S_2 \setminus \{z\} \simeq (0,1)\times(2,4)$

**הסבר**: נזכיר $S_2 \setminus \{z\} \simeq \mathbb{R}^2 \quad \forall z \in S_2$ היטל סטראוגרפי.

מצד שני, $\mathbb{R}^2 \simeq (0,1)\times(2,4)$ בגלל הטענה הקודמת ו- $\mathbb{R} \simeq (a,b)$ .

**תרגיל**: $X \times Y \simeq Y \times X$

נסו להוכיח וגם להכליל למקרה של *n* גורמים ותמורות. למשל
$X_1 \times X_2 \times X_3 \simeq X_3 \times X_2 \times X_1$ .

**משפט**: נניח $f_i : Y \to X_i$ פונקציות רציפות. אז "**פונקצית האלכסון**" $f := \Delta_{i\in I} f_i$ הבאה $f(y) = (f_i(y))_{i\in I} \quad f : Y \to X = (\prod_{i\in I} X_i , \tau_\Pi)$

היא רציפה ומתקיים $f_k = p_k \circ f \quad \forall k \in I$ .

**הוכחה**: $f_k(y) = p_k((f_i(y))_{i\in I}) = p_k(f(y)) = (p_k \circ f)(y) \quad \forall y \in Y$

נתון ש $f_k$ רציפות (והוכחנו $f_k = p_k \circ f$ ). לכן לפי המשפט "טופולוגיה חלשה" גם $f$ .

☺

**דוגמה**: $f_2 : \mathbb{R} \to [-1,1], f_2(t) = \sin t \quad f_1 : \mathbb{R} \to [-1,1], f_1(t) = \cos t$

$f(\mathbb{R}) = S_1 \quad f = f_1 \Delta f_2 : \mathbb{R} \to [-1,1]\times[-1,1],\ f(t) = (\cos t, \sin t)$ .

**<u>הגדרה</u>**: פונקציה $f:X\to Y$ נקראת *פתוחה* אם תמונה של ת"ק פתוחה היא פתוחה.
באופן דומה מגדירים *פונקציה סגורה*.

<u>דוגמאות:</u>

- נניח $f:X\to Y$ פונקציה רציפה חח"ע ועל. אז הפונקציה הומיאומורפיזם אם"ם היא סגורה (פתוחה).
  קחו בחשבון $(f^{-1})^{-1}=f$ וקריטריונים לרציפות.
- הפונקציה הנ"ל $f:[0,1)\to T$ היא לא פתוחה ולא סגורה.
- $f(x)=\begin{cases} x & x\in[0,1] \\ 1 & x\in[1,3] \end{cases}$ $\quad f:[0,3]\to[0,1]$ רציפה על (וסגורה, נלמד !)
  **לא פתוחה** (כי $X=(2,3)$ פתוחה ב $[0,3]$ אבל $f[0,3]=\{1\}$ לא פתוחה ב $Y=[0,1]$)
- היטל $p_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},(x_1,x_2)\mapsto x_1$ רציפה, על, פתוחה, אבל **לא סגורה** כי
  $A=\{(x,\frac{1}{x})\,|\,x>0\}$ סגורה ב $\mathbb{R}^2$ אבל $p_1(A)=(0,\infty)$ לא סגורה ב $\mathbb{R}$.

**<u>משפט</u>**: (פתיחות הטלות)

כל הטלה $(X_i,\tau_i)\to(\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}}X_i,\tau_\prod)\,:p_i$ היא פונקציה **פתוחה**.

**הוכחה**: צ"ל $p_k(O)\in\tau_k \quad \forall O\in\tau_\prod$.

אם $O\in\gamma$ תיבה בסיסית אז

$$\exists \text{ finite } J\subseteq I \quad O=\bigcap_{i\in J}p_j^{-1}(O_j)$$

נשתמש בשוויון ג $p_k(O)=p_k(\bigcap_{i\in J}p_j^{-1}(O_j))=\begin{cases} O_k & if\ k\in J \\ X_k & if\ k\notin J \end{cases}$.

התמונה היא פתוחה. זה מוכיח מקרה של $O\in\gamma$.

במקרה כללי קחו בחשבון ש $\gamma$ בסיס ל $\tau_\prod$ ותשתמשו ב $t_3$ (כל פונקציה שומרת איחודים).

☺

<u>אזהרה</u>: מכפלה קרטזית אינסופית של קבוצות פתוחות לא תמיד פתוחה

(בעצם אם ורק אם פתוחה אם כמעט כל הגורמים הם מרחבים עצמם בהתאמה).

$\left(\frac{1}{2},3\right)^{\mathbb{N}}=\left(\frac{1}{2},3\right)\times\left(\frac{1}{2},3\right)\times\ldots$ **לא פתוחה** ב $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$(a,b)^{\mathbb{N}}$ <u>לא פתוחה</u> ב $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

<u>הסבר:</u> $X=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots$

כאן $I=\mathbb{N}$ $\quad (X_n,\tau_n)=\mathbb{R}$

אם נניח בשלילה ש - $(a,b)^{\mathbb{N}}$ פתוח, אז $\quad (a,b)^{\mathbb{N}}\in\tau_\pi=\gamma^{\cup}$. לכן

$\Leftarrow$ $(a,b)^{\mathbb{N}}$ מכיל תיבה בסיסית לא ריקה.

לכן הוא מכיל $(a,b)\times(a,b)\times\ldots\supseteq O_1\times O_2\times\ldots\times O_m\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots$.

אבל זה גורר $(a,b)\supseteq\mathbb{R}$, סתירה!

<u>טענה שימושית</u>: במכפלה סופית אם $\gamma_i$ בסיס ל $\tau_i$ אז $\gamma_1\times\cdots\times\gamma_n$ בסיס ל $\tau_{\prod}$.

עבור מכפלה אינסופית: $\left\{\bigcap_{j\in J}p_j^{-1}(O_j)\,\middle|\, J\subseteq I \text{ סופי}, O_j\in\gamma_j\right\}$

**תרגיל**: הוכיחו:

א. $cl(\prod_{i\in I}A_i)=\prod_{i\in I}cl(A_i)$ לכל $A_i\subseteq(X_i,\tau_i)$ (אין הגבלה על $I$).

ב. $\operatorname{int}(A_1\times A_2)=\operatorname{int}(A_1)\times\operatorname{int}(A_2)$ (נכון לכל מספר **סופי**).

ג. תנו דוגמה שבה $\operatorname{int}(\prod_{i\in\mathbb{N}}A_i)\neq\prod_{i\in\mathbb{N}}\operatorname{int}(A_i)$

**שאלה חשובה**: מתי תכונה נשמרות ע"י מכפלה טופולוגית (סופית, אינסופית) ?

- (תמיד ללא הגבלת מספר הגורמים)

$T_0,T_1,T_2,T_3,T_{3.5}$, קשירות, קשירות מסילתית, קומפקטיות (משפט *Tychonoff*) ...

- (מכפלות סופיות ובנות מניה)

$\cdots,Sep,B_1,B_2,Metriz,\cdots$

- (מכפלות סופיות)

$discr$, קומפקטיות מקומית (נלמד !)

<u>הערה</u>: דיסקרטיות לא נשמרת ע"י מכפלה אינסופית (אפילו בת מנייה).

למשל $C\simeq\{0,1\}^{\mathbb{N}}\notin discr$ הומיאומורפי לקבוצת קנטור (נלמד !)

**הערה:** מכפלה סופית שומרת על מטריזביליות (נכון גם למכפלה בת מניה).

$$(X_1,\rho_1),(X_2,\rho_2)\in Metr$$

$$\to\left(X_1,\underbrace{top(\rho_1)}_{\tau_1}\right),\left(X_2,\underbrace{top(\rho_2)}_{\tau_2}\right)\in TOP$$

טענה: יש התאמה עם הגדרת טופולוגית $\tau_\pi$ "מטריקת מכפלה".

א) "מטריקה בסגנון אוקלידס"

$$d(x,y)\coloneqq\sqrt{\rho_1(x_1,y_1)^2+\rho_2(x_2,y_2)^2}$$

ב) $d_1(x,y)\coloneqq\rho_1(x_1,y_1)+\rho_2(x_2,y_2)$

ג) $d_{max}(x,y)\coloneqq\max\{\rho_1(x_1,y_1),\rho_2(x_2,y_2)\}$

תרגיל:

א) $d\sim d_1\sim d_{max}$ ה $X\coloneqq X_1\times X_2$.

ב) $\underbrace{top(d)=top(d_1)=top(d_{max})}_{(\text{א})\Rightarrow}=\underbrace{\tau_\pi}_{\text{טופולוגית מכפלה}}$

**מטריזציה במקרה של מכפלה בן מנייה:**

$$X=\prod_{i\in\mathbb{N}}(X_i,\rho_i)=X_1\times X_2\times\cdots$$

$d(x,y)\coloneqq\sup\{\frac{1}{2^i}\frac{\rho_i(x_i,y_i)}{1+\rho_i(x_i,y_i)}\mid i\in\mathbb{N}\}$ אחת מהאפשרויות.

# קומפקטיות "הכללה גאונית של סופיות"

**הגדרה** מרחב טופולוגי $(X,\tau)$ הוא **קומפקטי** אם לכל כיסוי פתוח $X=\bigcup_{i\in I}O_i$ שלו יש תת כיסוי סופי (ז"א קיימים $O_{i_1},O_{i_2},\cdots,O_{i_n}$ כך ש $X=O_{i_1}\cup O_{i_2}\cup\cdots\cup O_{i_n}$).

סימון: $(X,\tau)\in\mathrm{Comp}$.

**הגדרה שקולה** (קריטריון FIP תכונת החיתוך הסופי)

נניח $\{A_i:i\in I\}$ קבוצות סגורות ב $(X,\tau)$ כך ש $\bigcap_{i\in I}A_i=\varnothing$. אז קיימים $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_n}$ כך ש $A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_n}=\varnothing$.

**הערה**: קומפקטיות חשובה מאוד, בין היתר, "במשפטי קיום".

**<u>תכונות ודוגמאות:</u>**

- כל מרחב <u>סופי</u> הוא קומפקטי.
- $Comp \ni \left(X,\tau_{cofinite}\right)$

*<u>הסבר:</u>* קבוצה קוסופית היא מכסה כמעט הכל פרט למספר סופי של נקודות.

- $X \text{ is finite} \Leftrightarrow (X,\tau_{discr}) \in \mathrm{Comp}$

*<u>הסבר:</u>* $\{\{x\}: x\in X\}$ כיסוי **פתוח** של $X$ ...

**<u>משפט:</u>** אם $(X,d)$ מ"מ כך ש $(X,top(d))\in Comp$. אז $(X,d)$ חסום.

הוכחה: ניקח $z\in X$, אז $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n(z)$ כיסוי פתוח.

יש תת כיסוי <u>סופי</u> ואז $\exists n_0: X=B_{n_0}(z)$ . לכן $diam\, X\le 2n_0$.

☺

**<u>תוצאה:</u>** $\mathbb{R}^n,\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}\notin Comp$ , כל מרחב נורמי (לא מנוון).

**<u>הגדרה:</u>** תת קבוצה $Y$ במרחב $X$ נקראת **קומפקטית** אם $(Y,\tau_Y)\in\mathrm{Comp}$.

**משפט (קריטריון לתת קבוצה קומפקטית)** התנאים הבאים שקולים:

א) $Y$ תת קבוצה קומפקטית ב $X$.

ב) לכל אוסף $\alpha=\{O_i\}_{i\in I}$ של קבוצות פתוחות ב $X$ שמכסה את $Y$

(ז"א $Y\subseteq\bigcup_{i\in I}O_i$) קיים תת אוסף <u>סופי</u> $\{O_j\}_{j\in J}$, $J\subseteq I$ סופי שמכסה את $Y$

(ז"א $Y\subseteq\bigcup_{j\in J}O_j$).

<u>הסבר:</u> נובע מהגדרת תת מרחב טופולוגי.

- איחוד סופי תת קבוצות קומפקטיות גם קומפקטי.

**הערה:** לפי משפט Heine-Borel (נוכיח בהמשך):

תת מרחב $X$ של $\mathbb{R}^n$ קומפקטי אם ורק אם $X$ סגור וחסום ב $\mathbb{R}^n$.

**<u>תרגיל:</u>** תת קבוצה $Q\cap[0,1]$ סגורה וחסומה ב $Q$ אבל לא קומפקטית.
זה אפשר להוכיח דרך הגדרה או דרך משפט Heine-Borel (לא סגור ב $\mathbb{R}$ )

**תרגיל:** ת"ק $Y=[0,1]$ בקו סורגנפרי $(\mathbb{R},\tau_s)$ לא קומפקטית.

פתרון: נקודון $\{1\}$ מבודד ב $Y$. כיסוי $\alpha:=\bigcup_{n\geq 2}[0,\frac{n-1}{n})\cup\{1\}$ כיסוי פתוח ("בעייתי") של $Y$ ללא תת כיסוי סופי. (שימו לב: $[0,1]\cap[1,2)=\{1\}$ פתוחה בתת מרחב $[0,1]$ של $(\mathbb{R},\tau_s)$)

**הערה:** קומפקטיות לא תורשתית $\underbrace{(0,1)}_{\notin Comp}\subset\underbrace{[0,1]}_{\in Comp}$

**הסבר:** $\alpha:=\{(\frac{1}{n+1},1):n\in\mathbb{N}\}$ כיסוי פתוח "בעייתי" (ללא תת כיסוי סופי) של $(0,1)$

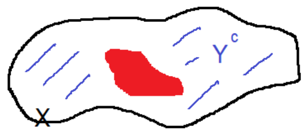
**הסבר שקול** (דרך FIP) $\alpha:=\{(0,\frac{1}{n+1}]:n\in\mathbb{N}\}$ משפחת קבוצות סגורות עם FIP אבל

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(0,\tfrac{1}{n+1}]=\varnothing$$

אבל יש תורשתיות קומפקטיות לגבי תת קבוצות סגורות.

**משפט:** נניח $X\in Comp$, $Y\subseteq X$ תת קבוצה סגורה. אז גם $Y\in Comp$.

**הוכחה:**




נניח $\alpha=\{O_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות פתוחות ב $X$ כך ש $Y\subseteq\bigcup_{i\in I}O_i$

**הרעיון:** להוסיף $Y^c$ (קבוצה פתוחה) לאוסף $\alpha$ ואז מתקבל אוסף חדש $\alpha^*=\alpha\cup\{Y^c\}$. הוא בעצם כיסוי פתוח של $X$.

$X\in Comp \Leftarrow$ קיים תת כיסוי סופי $\gamma\supseteq\alpha^*$. $Y^c$ לא משתתף בכיסוי של $Y$ לכן אם מורידים $Y^c$ מ $\gamma$ (בתנאי שהוא נמצא שם) אז עדיין נקבל כיסוי של $Y$. לכן נקבל תת אוסף סופי ל $\alpha$ (ולא ל $\alpha^*$) שמכסה את $Y$. אז $Y\in Comp$ עפ"י קריטריון לתת קבוצות.

■

**משפט:** תמונה רציפה שומרת על $Comp$.

**הוכחה:** $X\in Comp$. $f$ רציפה ועל $f(X)=Y$. צ"ל $Y\in Comp$.

נניח $\alpha=\{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של $Y$. צ"ל קיים כיסוי סופי.

$Y=\bigcup_{i\in I}O_i \Leftarrow$

$X=f^{-1}(\bigcup_{i\in I}O_i)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(O_i)$.

$\{f^{-1}(O_i)\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של $X$ ($f^{-1}(O_i)$ פתוח בגלל ש $f$ – רציפה).

$X \in Comp$ ⇐ קיים תת כיסוי סופי ל - $\{f^{-1}(O_i)\}_{i\in I}$, ז"א קיים $J \subseteq I$ סופי כך ש –

$$X = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(O_j)$$

אז מכאן $\quad Y = f(X) = f\left(\bigcup_{j\in J} f^{-1}(O_j)\right) = \bigcup_{j\in J} f(f^{-1}(O_j)) = \bigcup_{j\in J} O_j$

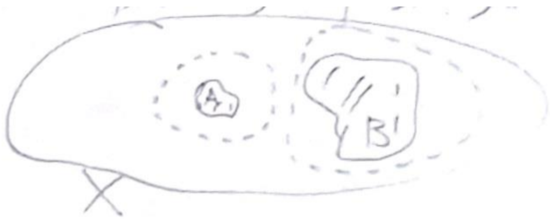
(תמיד $ff^{-1}(A) \subseteq A$ אבל אם $f$ על אז $ff^{-1}(A) = A$ )

מצאנו תת כיסוי סופי $\{O_j\}_{j\in J}$ ל $\alpha$.

■

**<u>תרגיל:</u>** נניח $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו $f([a,b]) = [c,d]$.

**<u>משפט (ההפרדה):</u>** נניח $X \in T_2$, $A,B$ תת קבוצות קומפקטיות וזרות. אזי קיימת סביבות (פתוחות) זרות.




**<u>הוכחה:</u>**

<u>מקרה א'</u> $A = \{a\}$

<u>הערה:</u> קל להוכיח בהנחה נוספת אם $B$ סופית (חיתוך סופי).

הרעיון הוא להפעיל את הקומפקטיות של $B$ ...

$$X \in T_2 \Rightarrow \boxed{\forall b \in B\ \exists U_b \in N(a)\ \exists V_b \in N(b): U_b \cap V_b = \emptyset}$$

$U_b$ ו $V_b$ סביבות פתוחות.

$\alpha = \{V_b\}_{b\in B}$ כיסוי פתוח של תת קבוצה $B$ במרחב $X$.

בגלל קריטריון (3) ⇐ קיים תת כיסוי <u>סופי</u>

$$\exists\ \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq B: \qquad B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i} \underbrace{=:}_{\text{נסמן}} V \in N(B)$$

$V$ סביבה פתוחה של $B$. נגדיר בהתאמה

$$N(a) \ni U \coloneqq \bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i}$$

מ $(t_2)$ נקבל שזוהי סביבה פתוחה של $a$. כעת, לכל $i \in \{1, \dots, n\}$

$$U_{b_i} \cap V_{b_i} = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_{b_i}\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{b_i}\right) = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$U \cap V = \emptyset$$

הוכחנו את מקרה א'.

<u>מקרה ב' (כללי)</u>

בעזרת שלב א':

$$\forall a \in A\ \exists U_a \in N(a)\ \exists V_a \in N(B): U_a \cap V_a = \emptyset$$

כאשר $U_a, V_a$ סביבות פתוחות. $\alpha = \{U_a\}_{a \in A}$ כיסוי פתוח של $A$ במרחב $X$.

$$X \supseteq A \in Comp$$

לכן שוב לפי הקריטריון יש תת כיסוי סופי

$$\exists\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A: N(A) \ni U := \cup_{i=1}^{m} U_{a_i} \supseteq A$$

נגדיר $N(B) \ni V := \cap_{i=1}^{m} V_{a_i} \supseteq B$ $V$ פתוח בגלל - $(t_2)$.

$$U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} U_{a_i}\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} V_{a_i}\right) = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$U \cap V = \emptyset$$

■

**<u>משפט (הסגירות):</u>** נניח $X \in T_2$, $Y \subset X$ תת קבוצה קומפקטית. אזי $Y$ סגורה ב $X$.

**<u>הוכחה:</u>**


ניקח $a \notin Y$ (בה"כ קיימת!).

צ"ל $a \notin \bar{Y}$.

לפי משפט ההפרדה, קיימות סביבות פתוחות וזרות $U \in N(a), V \in N(Y)$ כך ש

$$U \cap V = \emptyset$$

$$U \cap Y = \emptyset$$

ולכן $\bar{Y}$ $a \notin$ ולכן $Y$ סגור.

■

**<u>משפט (הנורמליות):</u>** $X \in T_4 \Leftarrow \begin{cases} X \in T_2 \\ X \in Comp \end{cases}$

ניסוח שקול: $Comp \cap T_2 \subset T_4$

**<u>הוכחה:</u>** $A, B$ תת קבוצות סגורות וזרות. $A, B \in Comp$

(כתת קבוצה סגורה בקומפקטי). אז לפי משפט ההפרדה קיימות סביבות זרות.

■