שיעור חזרה

ב. יהיו: V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי, $T:V\to V$ אופרטור ליניארי כלשהו. הוכיחו: $(\operatorname{im}T)^{\perp}=\ker T^{*}$

אם $u\in\ker T^{*}$ אז לכל $v\in V$ מתקיים $\langle T(v),u\rangle=\langle v,T^{*}(u)\rangle=\langle v,\vec{0}\rangle=0$, ולכן $u\in(\operatorname{im}T)^{\perp}$; ואם $u\in(\operatorname{im}T)^{\perp}$, אז, לכל $v\in V$, $\langle v,T^{*}(u)\rangle=\langle T(v),u\rangle=0$, ולכן $T^{*}(u)=\vec{0}$ כלומר $u\in\ker T^{*}$. בסה"כ: $u\in\ker T^{*}\Leftrightarrow u\in(\operatorname{im}T)^{\perp}$.

3. תהי $A\in\mathbb{R}^{4\times4}$ מטריצה עם פולינום מינימלי $m_A(x)=x^3-2x^2$.

א. מצאו את הערכים העצמיים של A, כולל ריבוי; רשמו את כל האפשרויות.

$\lambda=0$ בריבוי (אלגברי) 3, $\lambda=2$ בריבוי 1; או $\lambda=0$ בריבוי 2, $\lambda=2$ בריבוי 2.

ב. מהי צורת ז'ורדן של A? רשמו את כל האפשרויות.

$J_2(0)\oplus J_1(0)\oplus J_1(2)$ או $J_2(0)\oplus J_1(2)\oplus J_1(2)$.

ג. הוכיחו: המטריצה A אינה סימטרית.

מטריצה ממשית סימטרית ניתנת ללכסון (אורתוגונלי), ולכן צורת ז'ורדן שלה אלכסונית. זה לא מתקיים עבור אף אחת מהאפשרויות בסעיף ב'. נימוק חילופי: המטריצה לא ניתנת ללכסון כי הפ"מ הנתון אינו מתפרק לגורמים ליניאריים <u>שונים</u>.

<u>תרגיל</u>

תהיי A מטריצה ממשית מסדר 3 כך ש A אינה הפיכה, ומתקיים $|A-2I|=|A+2I|=0$.

הוכח כי A לכסינה.

<u>פתרון</u>

מכיוון ש A אינה הפיכה נקבל ש $\lambda=0$ ערך עצמי.

מכיוון ש $|A-2I|=|A+2I|=0$ נקבל ש $\lambda=2,\lambda=-2$ ערכים עצמיים.

קיבלנו שלושה ערכים עצמיים שונים והמטריצה מסדר 3, סה"כ המטריצה לכסינה.

ב. נסמן ב- $\sigma(A)$ את הספקטרום (קבוצת הערכים העצמיים) של מטריצה ריבועית A. הוכיחו, לכל $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$: $\sigma(AB)=\sigma(BA)$. התייחסו במפורש למקרה של ערך עצמי 0.

אם $0=\lambda\in\sigma(AB)$ אז AB לא הפיכה, ולכן לפחות אחת מהמטריצות B,A לא הפיכה, ולכן גם $0=\lambda\in\sigma(BA)$. אם $0\neq\lambda\in\sigma(AB)$ אז $ABv=\lambda v$ עבור וקטור עצמי מתאים $v\neq\vec{0}$, ולכן גם $BABv=\lambda Bv$. הוקטור $Bv\neq\vec{0}$ (אחרת גם $\lambda v=ABv=\vec{0}$ בניגוד להנחה $\lambda\neq0$), ולפיכך השוויון $(BA)Bv=\lambda Bv$ מוכיח כי $\lambda\in\sigma(BA)$. הוכחנו עד כה כי $\sigma(AB)\subseteq\sigma(BA)$, והחלפת תפקידי B,A מוכיחה את ההכלה בכיוון ההפוך.

תרגיל

יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $U,W \subseteq V$ תת מרחבים כך ש $\dim U = m, \dim W = k$.

א. הוכיחו כי $\langle v,u \rangle = \langle \pi_U(v),u \rangle$ לכל $u \in U, v \in V$.

ב. נגדיר אופרטור $P_U : U \to U$ ע"י $P_U(u) = \pi_U(\pi_W(u))$

הוכיחו כי לכל שני וקטורים $u_1,u_2 \in U$ מתקיים $\langle P_U(u_1),u_2 \rangle = \langle u_1, P_U(u_2) \rangle$.

פתרון

א. כפי שראינו בהגדרה השנייה $(v - \pi_U(v)) \in U^\perp$ ולכן $\langle v - \pi_U(v),u \rangle = 0$

נשתמש בליניאריות ברכיב הראשון ונעביר אגף על מנת לקבל $\langle v,u \rangle = \langle \pi_U(v),u \rangle$.

ב. על פי הגדרת האופרטור מתקיים $\langle P_U(u_1),u_2 \rangle = \langle \pi_U(\pi_W(u_1)),u_2 \rangle$.

כיוון ש $u_2 \in U$ לפי סעיף א מתקיים: $\langle \pi_U(\pi_W(u_1)),u_2 \rangle = \langle \pi_W(u_1),u_2 \rangle$.

מכיוון ש $\pi_W(u_1) \in W$ נקבל $\langle \pi_W(u_1),u_2 \rangle = \langle \pi_W(u_1), \pi_W(u_2) \rangle = \langle u_1, \pi_W(u_2) \rangle$

שוב כיוון ש $u_1 \in U$ מתקיים $\langle u_1, \pi_W(u_2) \rangle = \langle u_1, \pi_U(\pi_W(u_2)) \rangle = \langle u_1, P_U(u_2) \rangle$