סימוני איינשטיין

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3 \\ a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{3} a_{1i}v_i \\ \sum\limits_{i=1}^{3} a_{2i}v_i \\ \sum\limits_{i=1}^{3} a_{3i}v_i \end{pmatrix}$$

מוסכמות הסכימה של איינשטיין - כאשר רוצים לסכום על אינדקס מסויים, נוותר על $\sum$ ונציין את הסכימה על אינדקס זה ע"י רישום האינדקס בגבהים שונים בביטוי:

$$= \begin{pmatrix} {a^i}_1 v^i \\ {a^i}_2 v^i \\ {a^i}_3 v^i \end{pmatrix}$$

כיצד מבינים עד לאן לסכום $i = 1, ...n$? מתך הקשר - אצלנו המימד 2 או 3.
איך קוראים ביטוי שנתון במוסכמות סכימה?

$$a_{ij}v_i^j = a_{i1}v_i^1 + a_{i2}v_i^2 + a_{i3} = v_i^3$$

$$a^{ij}v_{ji} = a^{i1}v_{1i} + a^{i2}v_{2i} + a^{i3}v_{3i}$$

דלתא של קרונקר

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

דוגמאות

(1) וקטורים

$v \in \mathbb{R}^n$. נסמן את וקטורי הבסיס $e_1, ...e_n$ (בחירה מוסכמת שאינדקסים של איברי הבסיס יהיו למטה)

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + ... + v^n e_n = v^i e_i$$

מרגע זה - קואורדינטות של וקטורים יהיו עם אינדקס עליון - $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$

(2) מכפלה סקלרית

$$v \cdot w = v^1 \cdot w^1 + v^2 \cdot w^2 + ... + v^n \cdot w^n$$

לא נכתוב את זה בתור $v^i \cdot w_i$, אלא נכתוב את זה בתור

$$= \delta_{ij} v^i \cdot w^j$$

(3) תבנית בי־לינארית

$$B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$(u, v) \mapsto v^t B u$$

$$\begin{pmatrix} v^1 & \cdots & v^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} = ...$$

עם הסימונים החדשים, נבצע פעולת ביניים

$$... = \begin{pmatrix} v^1 & \cdots & v^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} u^j \\ \vdots \\ b_{nj} u^j \end{pmatrix} = ...$$

ונסיים:

$$... = b_{ij} u^j v^i$$

בכתיבה של האינדקסים, אפשר לכתוב את הפונקציה בתור

$$\left\{ u^j \right\} \left\{ v^i \right\} \mapsto b_{ij} u^j v^i$$

נשים לב:

- הווקטור u, שמתבצעת בו סכימה על אינדקס עמודות במטריצה, נכפל מימין $B \cdot u$
- הווקטור v, שמתבצעת בו סכימה על אינדקס עמודות במטריצה, נכפל מימין $v \cdot B$

(4) העתקה לינארית

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$V \mapsto A \cdot V$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1{}_j v^j \\ \vdots \\ a^n{}_j v^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^1 \\ \vdots \\ c^n \end{pmatrix}$$

ולכן ניתן לכתוב את הסכימה

$$\{v^j\} \mapsto a^i{}_j v^j$$

אנחנו יודעים שזה ווקטור בגלל שיש אינדקסים למעלה.

תרגיל

$$T_B \circ T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

נרצה להוכיח, באמצעות הסימונים החדשים את השוויון:

$$v \mapsto \underbrace{B\left(AV\right)}_{(1)} = \underbrace{\left(BA\right)v}_{(2)}$$

$$(1) = \overbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}^{B} \left(\overbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \right) = B\left(a^i{}_j v^j\right) = b^k{}_i \left(a^i{}_j v^j\right) = b^k{}_i a^i{}_j v^j$$

$$(2) = \left(\overbrace{\begin{pmatrix} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \end{pmatrix}}^{B} \overbrace{\begin{pmatrix} & \vdots & \\ & \vdots & \\ & \vdots & \end{pmatrix}}^{A} \right) \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & b^k{}_i a^i{}_j & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \left(b^k{}_i a^i{}_j\right) v^j = b^k{}_i a^i{}_j v^j$$

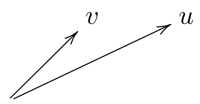
הערה

אי אפשר לסמוך אוטומטית שהסימונים יתאימו ־ צריך לבחור אותם במיוחד כדי שיתאימו.

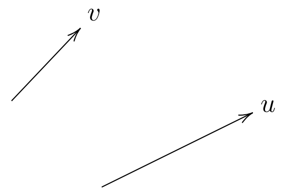
ווקטורים

תזכורת

אפשר לחשוב על $u, v \in \mathbb{R}^n$ בתור חצים:



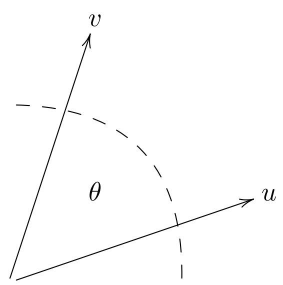
מה שחשוב זה הגודל והכיוון ־ באותה מידה אפשר להזיז כל אחד מהווקטורים בלי לשנות אותם:



(1) מכפלה סקלרית

$$u \cdot v = u^1 v^1 + u^2 v^2 + \cdots + u^n v^n$$

ניתן להסתכל על הווקטורים בצורה גיאומטרית:



ואז

$$u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}$$

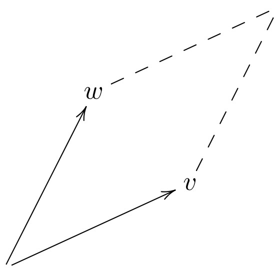
נסמן את ההיטל של u על v(האנך שיורד מסוף u לישר של v) בx, ואז

$$\cos\theta = \frac{x}{|u|} \Rightarrow x = \frac{uv}{\cancel{|u|}\,|v|}\cancel{|u|} = \frac{u\cdot v}{|v|}$$

ניתן לבטא את מקדמי הווקטור באמצעות מכפלה סקלרית עם ווקטורי היחידה:

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = v = \underbrace{(v\cdot e_1)}_{v^1}\cdot e_1 + \underbrace{(v\cdot e_2)}_{v^2}\cdot e_2$$

(2) חישוב שטח מקבילית הנפרסת בין 2 ווקטורים במישור



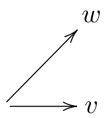
איך נחשב את שטח המקבילית?
נשתמש בנוסחה לשטח משולש לפי זווית בין שני קודקודים, ונכפיל ב2. נקבל: $S = |v|\,|w|\sin\theta = |v|\,|w|\cos(90^\circ - \theta)$

כדי לסובב וקטור ב90° במישור, מבצעים $\tilde{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = v$. זה מקרה פרטי של מטריצת סיבוב - $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$. באופן כללי, מטריצת סיבוב בזוית α היא $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
לכן ניתן לכתוב את השטח בתור:

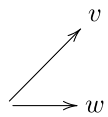
$$\tilde{v}\cdot w = |\tilde{v}|\,|w|\cos(90^\circ - \theta)$$

$$S = \begin{pmatrix} -v^2 \\ v^1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = -v^2w^1 + v^1w^2 = \begin{vmatrix} v^1 & v^2 \\ w^1 & w^2 \end{vmatrix}$$

הערה

השטח המתקבל מנוסחא זו חיובי רק אם סדר הווקטורים הוא כמו בדוגמה - 

.

במקרה ההפוך, 

, די לקבל את השטח נחשב $\begin{vmatrix} w^1 & w^2 \\ v^1 & v^2 \end{vmatrix}$.

כדי לא להיות תלויים בכיוון, אפשר פשוט לחשב $S_{v,w} = \left|\begin{vmatrix} v^1 & v^2 \\ w^1 & w^2 \end{vmatrix}\right|$.

(3) שטח מקבילית ב$\mathbb{R}^3$

גם כאן ניתן להשתמש בנוסחה $S = |u| \cdot |v| \cdot \sin\theta$.

במישור, כדי לוותר על חישוב הזווית רצינו לסובב את אחד הווקטורים ב$90°$. במרחב זה בעיה - שכן אי אפשר פשוט לסובב וקטור בזווית מסויימת, צריך גם לבחור ציר סיבוב.

במקום זה, נשתמש בזהות הטריגונומטרית $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$$S = |u| \cdot |v| \cdot \sin\theta = |u|\,|v| \sqrt{1-\cos^2\theta} = |u| \cdot |v| \cdot \sqrt{1 - \frac{(u\cdot v)^2}{|u|^2 \cdot |v|^2}} =$$

$$= \cancel{|u| \cdot |v|} \cdot \sqrt{\frac{|u|^2 \cdot |v|^2 - (u\cdot v)^2}{\cancel{|u|^2 \cdot |v|^2}}} = \sqrt{|u|^2 \cdot |v|^2 - (u\cdot v)^2}$$

כדי לפשט את הנוסחה נשתמש במכפלה וקטורית:

מכפלה וקטורית

מכפלה וקטורית מוגדרת רק ב$\mathbb{R}^3$:

$$|u|^2 \cdot |v|^2 - (u\cdot v)^2 = |u \times v|^2$$

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$u, v \mapsto u \times v$$

הגדרה: $$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} := \left(u^2v^3 - v^2u^3, v^1u^3 - v^3u^1, u^1v^2 - v^1u^2\right)$$

קשה לזכור את הנוסחה הזו, אבל זה שווה ל:

$$... = \left(\begin{vmatrix} u^2 & u^3 \\ v^2 & v^3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u^1 & u^3 \\ v^1 & v^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ v^1 & v^2 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} u^2 & u^3 \\ v^2 & v^3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} u^1 & u^3 \\ v^1 & v^3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ v^1 & v^2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

כאשר $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ הם ווקטורי היחידה. אבל ניתן לכתוב את זה בצורה יותר מקוצרת:

$$... = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix}$$

חשוב לזכור שזה אינוס של הסימון ־ פורמלית מותר לנו לשים בדטרמיננטה רק סקלרים, לא ווקטורים. אבל קל לזכור ולכתוב את זה ככה.

תכונות של כפל ווקטורי

.1

$$|u \times v| = S$$

אם u וv תלויים לינארית, $u \times v = (0,0,0)$

2. $u \times v$ מאונך לu ומאונך לv $\Leftarrow$ מאונך לכל המישור שנפרש ע"י u וv.

3. כיוון הווקטור $u \times v$ נבחר לפי כלל יד ימין:

- באצבע המורה שמים את הווקטור הראשון בכפל
- בכיוון כף היד שמים את הווקטור השני
- האגודל מצביע לכיוון וקטור המכפלה