משפטי היררכיה

הגדרה 1

תהי $t:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ פונקציה. המחלקה $\mathrm{DTIME}\left(t\right)$ מכילה את השפות שניתן להכריעה בסיבוכיות זמן $t\left(n\right)$.

הגדרה 2

פונקציה $t:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ נקראת ניתנת לבניה בזמן אם קיים אלגוריתם שבהינתן n, מחשב את $t\left(n\right)$ תוך $t\left(n\right)$ צעדים.

משפט

לכל פונקציה t_1 שניתנת לבניה בזמן ולכל פונקציה t_2 כך ש$t_2\left(n\right)>t_1\left(n\right)\cdot\log^2\left(t_1\left(n\right)\right)$ וגם $t_1\left(n\right)>n$ מתקיים:

$$\mathrm{DTIME}\left(t_1\right)\subsetneq\mathrm{DTIME}\left(t_2\right)$$

מודל

לצורך ההוכחה נסתכל על מכונות טיורינג עם 2 סרטים.

הערה: אפשר להוכיח משפט דומה לכל מודל חישובי סביר, אבל חייבים להחליט על המודל מראש.

הוכחה

נראה שקיימת שפה L כך ש:

1. $L\notin\mathrm{DTIME}\left(t_1\right)$
2. $L\in\mathrm{DTIME}\left(t_2\right)$

הרעיון: לכל מ"ט M שרצה t_1 צעדים, קיים קלט x_M עליו M נכשלת - כלומר מחזירה תשובה שגויה.

נשים ♡: בד"כ מגדירים מכונה לפי שפה - אבל פה אנו מגדירים מכונה לפי שפה.

פורמלית, נגדיר פונקציית מיפוי μ שממפה מחרוזות בינאריות למכונות טיורינג. הדרישה היא שμ היא על - כלומר לכל מ"ט קיימת מחרוזת שממופה אליה.
השפה L מוגדרת באופן הבא: בהינתן קלט x:

1. חשב את $t=t_1\left(\left|x\right|\right)$.

2. תהי M מ"ט המתאימה לx - כלומר $M = \mu(x)$.

3. הרץ את $M(x)$ t צעדים לכל היותר.

   () אם $M(x)$ עצרה תוך t צעדים והחזירה 1, $x \notin L$.

   () אם $M(x)$ עצרה תוך t צעדים והחזירה 0, $x \in L$.

   () אם $M(x)$ לא עצרה תוך t צעדים[1], נקבע שרירותית ש$x \notin L$.

נראה ש$L \notin \mathrm{DTIME}(t_1)$. נראה ש**כל** מ"ט בעלת סיבוכיות זמן t_1 לא מכריעה את L.
תהי M מ"ט בעלת סיבוכיות זמן t_1, נראה שקיים קלט עבורו M נכשלת.
נתבונן בx_M כך ש$\mu(x_M) = M$) M הוא על). יש שתי אפשרויות:

א. $x_M \in L \Longleftarrow M$ עצרה תוך t צעדים והחזירה $0 \Longleftarrow M$ טועה על x_M.

ב. $x_M \notin L \Longleftarrow M(x_M)$ עצרה תוך t צעדים והחזירה $1 \Longleftarrow M$ טועה על x_M.

נראה ש$L \in \mathrm{DTIME}(t_2)$, נראה שקיימת מ"ט עם 2 סרטים המכריעה את L בסיבוכיות זמן t_2.

טענת עזר: תהי M מ"ט בעלת k סרטים העובדת בסיבוכיות זמן t. קיימת מ"ט M' בעלת שני סרטים המסמלצת את אופן פעולת M תוך $O(t \log t)$ צעדים.

הוכחה: כל צעד של המכונה M ניתן לסמלץ בזמן $|\langle M\rangle|$ - כי צריך לעבור על M, לראות את הפקודה הבאה, ולבצע אותה.
סה"כ - $|\langle M\rangle| \cdot t_1(|x|)$.

נגדיר פונקציה μ שעובדת באופן הבא: אם $x = \langle M\rangle 1 \overbrace{0\cdots0}^{2^{|\langle M\rangle|}}$ אזי החזר את M, אחרת החזר מ"ט שרירותית.

$$|\langle M\rangle| = \log|x| < \log t_1(|x|)$$

■

[1] המקרה הזה לא באמת מעניין אותנו, כי זה אומר שסיבוכיות הזמן של M היא יותר מt_1 כלומר בכל אופן $L_M \notin \mathrm{DTIME}(t_1)$