פתרון תרגיל בית 9 בקורס 89-214 סמסטר א' תשע"ד

נהלים: בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך ההגשה הוא בשבוע המתחיל ב-19.1.2014 לתא 45 של חיים רוזנר בארון הימני.

שאלה 1. מבין שבע החבורות הבאות מסדר 40 מצאו איזו חבורות איזומורפיות אחת לשניה:

$$D_{10}\times\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4,\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_8,U_8\times\mathbb{Z}_{10},U_{10}\times\mathbb{Z}_{10},\mathbb{Z}_{40}$$

רמז: העזרו במשפט המיון לחבורות אבליות נוצרות סופית.

פתרון. נשים לב כי כל החבורות המופיעות הן אבליות, פרט לחבורה $D_{10}\times\mathbb{Z}_2$. לכן היא נמצאת במחלקה משל עצמה. כמו כן נשים לב כי $U_{10}=\{1,3,7,9\}\cong\mathbb{Z}_4$ (ודאו שהיא אכן ציקלית), ואילו $U_8=\{1,3,5,7\}\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

ידוע לנו כי $\mathbb{Z}_{10}\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_5$ ולכן $U_{10}\times\mathbb{Z}_{10}\cong\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$ וגם $U_8\times\mathbb{Z}_{10}\cong\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. כדי לשים לב ששני הזוגות של החבורות האחרונות אינם איזומורפיים, אפשר למשל לחשב את האקספוננט. $\exp\left(\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\right)=20$ ואילו $\exp\left(\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\right)=10$, ולכן חבורות אלו לא איזומורפיות. דרך אחרת היא להביא את החבורות האלו לצורה קנונית, שהיא יחידה עד כדי איזומורפיזם, לפי משפט המיון.

כמו כן $\mathbb{Z}_{40}\cong\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_8$ ואלו הן חבורות מאקספוננט 40.

בסך הכל קיבלנו ארבע "מחלקות" של חבורות, כשבכל מחלקה החבורות הן איזומורפיות אחת לשניה, אבל לא לחבורות מהמחלקות האחרות.

שאלה 2. תהי G חבורה. נסמן קבוצה של איברים $G^2=\left\{g^2:g\in G\right\}$. שימו לב שבחבורה חיבורית זו בעצם הקבוצה $2G=\{2g:g\in G\}$, והוכחתם בתרגיל הבית השני שזו חבורה אבלית אם G אבלית. נזכיר כי האקספוננט של חבורה הוא המספר הטבעי N הקטן ביותר כך ש-$a^N=e$ לכל $a\in G$, ומסמנים $\exp(G)=N$.

האם קיימת חבורה אבלית G כך שמתקיימים כל התנאים הבאים: $|G|=32$, $\exp(G)=4$, $\left[G:G^2\right]=4$?

פתרון. אם G חבורה אבלית עבורה $|G|=32$ וגם $\exp(G)=4$, אז האפשריות היחידות הן כי G איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$ או ל-$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$.

אפשר לחשב ישירות את האינדקס $\left[G:G^2\right]$ בשני המקרים ולראות כי מקבלים 8 או 16, אבל לא 4. לכן לא קיימת חבורה G כדרוש בשאלה. דרך אחרת היא לחשב את סדר חבורות המנה:

$$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4/2(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4)\cong\mathbb{Z}_2/2\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4/2\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4/2\mathbb{Z}_4\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$$

שהיא מסדר 8, ואת

$$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4/2(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4)\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$$

שהיא מסדר 16.

שאלה 3.

1. מצאו את מחלקות הצמידות השונות בחבורה S_6. אין צורך לכתוב את האיברים בכל מחלקת צמידות.
2. מצאו את $\exp(S_3)$ ואת $\exp(S_5)$.

פתרון.

1. מחלקות הצמידות בחבורות הסימטריה S_n מתאימות לקבוצות שמכילות את כל התמורות ממבנה מחזורים מסוים. לכן מספיק לדעת מי הם מבני המחזורים האפשריים. יש 11 כאלו, שנראה עבור כל אחד מהם נציג:

$$\begin{gathered}\mathrm{id}, (1\,2)\,, (1\,2)\,(3\,4)\,, (1\,2)\,(3\,4)\,(5\,6)\,, (1\,2\,3)\,, (1\,2\,3)\,(4\,5)\\ (1\,2\,3)\,(4\,5\,6)\,, (1\,2\,3\,4)\,, (1\,2\,3\,4)\,(5\,6)\,, (1\,2\,3\,4\,5)\,, (1\,2\,3\,4\,5\,6)\end{gathered}$$

2. כדי למצוא את האקספוננט בחבורות אלו כדאי להשתמש בסעיף הקודם, כדי למצוא את מבני המחזורים האפשריים בחבורות הסימטריה. כך נוכל לחשב בקלות מהו הכפולה המשותפת המינימלית של סדרי האיברים, שהרי תמורות בעלות אותו מבני מחזורים הן בעלות אותו סדר. כך נקבל $\exp(S_3) = \mathrm{lcm}(2,3) = 6$ וגם $\exp(S_5) = \mathrm{lcm}(2,3,4,5,6) = 60$.

שאלה 4. מצאו את כל החבורות האבליות מסדר 720 עד כדי איזומורפיזם. רמז: ידוע כי $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.

פתרון. נשתמש במשפט המיון לחבורות אבליות נוצרות סופית. אם G חבורה אבלית מסדר 720, אזי היא איזומורפית ל-$G \cong H_2 \times H_3 \times H_5$, כאשר H_2 היא חבורה אבלית מסדר $2^4 = 16$, H_3 היא חבורה אבלית מסדר $3^2 = 9$ ו-H_5 היא חבורה אבלית מסדר 5.

יש חבורה אחת מסדר 5 עד כדי איזומורפיזם והיא $\mathbb{Z}_5$ (שכן יש רק חלוקה אחת של 1). ישנן שתי חבורות מסדר 9 עד כדי איזמורפיזם והן $\mathbb{Z}_9$ ו-$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ (שכן יש שתי חלוקות של 2). ישנן חמש חבורות אבליות מסדר 16 עד כדי איזומורפיזם והן $\mathbb{Z}_{16}$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ו-$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (שכן יש חמש חלוקות של 4).

לכן בסך הכל ישנן עשר חבורות אבליות מסדר 720 עד כדי איזומורפיזם, והן

$$\begin{array}{rr}\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 & \mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5\\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5\\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 & \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5\\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5\\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5\end{array}$$

שאלה 5. השתמשו במשפט קיילי על מנת להציג את U_{14} כתת־חבורה של S_6.

פתרון. נשים לב כי $U_{14} = \{1,3,5,9,11,13\}$ היא חבורה ציקלית, למשל אפשר לבדוק כי היא נוצרת על ידי 3. לכן מספיק להראות מי היא התמונה σ של 3 בתוך $S_6 \cong S_{\{1,3,5,9,11,13\}}$. נעשה זאת לפי האלגוריתם בהוכחת משפט קיילי, שבו תמונות שאר האיברים יקבעו בשל הציקליות של U_{14}.

כזכור, האיבר 3 ישלח ל-σ כאשר לכל $x \in U_{14}$ יתקיים $\sigma(x) = 3 \cdot x$, כאשר $3 \cdot x$ היא הפעולה בחבורה U_{14}. נקבל כי

$$\sigma(1) = 3 \quad \sigma(3) = 9 \quad \sigma(5) = 1 \quad \sigma(9) = 13 \quad \sigma(11) = 5 \quad \sigma(13) = 11$$

ולכן $\sigma = (1\ 3\ 9\ 13\ 11\ 5) \in S_{\{1,3,5,9,11,13\}}$

שאלה 6. כעת נראה שקיים זוג של חבורות לא איזומורפיות המשוכנות אחת בתוך השנייה. נזכיר כי שיכון הוא מונומורפיזם, ונאמר כי חבורה A משוכנת בחבורה B אם קיים שיכון $f : A \to B$.

נסמן $G = \bigcup_{n \geq 5} S_n$ איחוד כל חבורות הסימטריה S_n עבור $n \geq 5$, ונסמן $H = \bigcup_{n \geq 5} A_n$ איחוד כל חבורות החילופין A_n עבור $n \geq 5$.

הערה. אנו יכולים לראות את S_n כתת־חבורה של S_{n+1} לפי השיכון הסטנדרטי, השולח תמורה σ של n איברים לתמורה $\hat{\sigma}$ של $n+1$ איברים לפי $\hat{\sigma}(i) = \sigma(i)$ לכל $1 \leq i \leq n$ ומקבע את האיבר האחרון $\hat{\sigma}(n+1) = n+1$. להמשך התרגיל נשתמש בנקודת מבט זו כשנדון בחבורות G ו-H.

1. הראו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימים שיכונים $A_n \hookrightarrow S_n \hookrightarrow A_{n+2}$. (רמז: השיכון הראשון הוא ברור לפי הכלה. לשיכון השני הגדירו העתקה

$$\phi_n : S_n \to A_{n+2}$$
$$\sigma(i) \mapsto \begin{cases} \sigma(i-2)+2 & 3 \leq i \leq n+2 \\ 1 & i = 1 \wedge \mathrm{sign}(\sigma) = 1 \\ 2 & i = 2 \wedge \mathrm{sign}(\sigma) = 1 \\ 2 & i = 1 \wedge \mathrm{sign}(\sigma) = -1 \\ 1 & i = 2 \wedge \mathrm{sign}(\sigma) = -1 \end{cases}$$

כלומר אם $3 \leq i \leq n+2$ אז $\phi_n(\sigma)(i) = \sigma(i-2)+2$; אם σ היא תמורה זוגית, אז נשלח אותה "להזזה" שלה בשני מקומות בתוך A_{n+2}, ואם σ תמורה אי־זוגית אז היא תשלח לאותה "הזזה" כפול החילוף $(1\,2)$. הראו מהבנייה כי תמונת ϕ_n מוכלת ב-A_{n+2} ושהיא הומומורופיזם מוגדר היטב. אתגר: חשבו למה אי אפשר לשכן את S_n בתוך A_{n+1} עבור $n \geq 2$.)

2. הראו כי קיים שיכון $\varphi : G \hookrightarrow H$. יש להראות כי השיכונים בסעיף הקודם תואמים, כלומר $\phi_{n+1}(\sigma) = \phi_n(\sigma)$ לכל $n \geq 5$ ולכל $\sigma \in S_n$.

3. הראו כי קיים שיכון $\psi : H \hookrightarrow G$.

4. הוכיחו כי החבורות G ו-H אינן איזומורפיות. רמז: אחת פשוטה והשנייה לא.

פתרון.

1. החבורה A_n היא תת־חבורה של S_n לכל n. לכן ודאי יש שיכון $A_n \hookrightarrow S_n$. לשיכון $S_n \hookrightarrow A_{n+2}$ נשתמש בהעתקות מהרמז. אפשר להוכיח כי ההעתקות ϕ_n הן שיכונים לכל $n \geq 5$ לפי הגדרה. נשים לב כי התמונה של תמורה σ היא תמיד ב-A_{n+2}. הרי אם σ היא זוגית, היא עוברת לתמורה זוגית, ואם היא אי־זוגית, אז היא נשלחת לתמורה אי־זוגית כפול חילוף (שהוא תמורה אי־זוגית), ולכן התמונה היא שוב תמורה

זוגית ההעתקות הן חח"ע כי התמורה היחידה שנשלחת ל-id היא id (תמונת כל תמורה אחרת היא לא הזהות עבור איזשהו $3 \le i \le n+2$). כדי להראות שההעתקות הן הומומורפיזמים צריך להראות כי לכל $\sigma, \tau \in S_n$ מתקיים $\phi_n(\sigma\tau) = \phi_n(\sigma)\phi_n(\tau)$. אפשר לשים לב כי בתמונה עבור $3 \le i \le n+2$ זו פשוט מכפלת אותן התמורות "בהזזה", ועבור $1 \le i \le 2$ התמונה היא או הזהות או החילוף $(1\,2)$ שזר לשאר המחזורים בתמונות של σ ו-τ עבור $3 \le i \le n+2$.
בנוגע לשאלת האתגר: נשים לב שנדרש כי הסדר של S_n יחלק את הסדר של A_{n+1}, לפי לגראנז'. אבל $\frac{|A_{n+1}|}{|S_n|} = \frac{n+1}{2}$, ולכן לא ייתכן כי n זוגי. אם n אי־זוגי, נסמן $m = \frac{n+1}{2}$ שהוא האינדקס של S_n בתוך A_{n+1}. אם S_n איזומורפית לתת־חבורה של A_{n+1}, אזי ישנו הומומורפיזם $f : A_{n+1} \to S_m$ שמושרה מ-m המחלקות של S_n. עבור $n \ge 5$ מתקיים כי $m! < |A_{n+1}| = \frac{(n+1)!}{2}$, ולכן לא ייתכן כי ההומומורפיזם f הוא חח"ע. ידוע כי הגרעין של f הוא תת־חבורה נורמלית של A_{n+1}, וזו סתירה כי A_{n+1} פשוטה עבור $n \ge 5$. עבור $n = 3$ ראינו בכיתה כי אין ל-A_4 תת־חבורה מסדר $|S_3| = 6$, ולכן אין שיכון $S_3 \hookrightarrow A_4$.

2. השיכון $\varphi : G \hookrightarrow H$ יוגדר לפי איחוד ההעתקות ϕ_n עבור $n \ge 5$. בשביל זה יש להראות כי ההעתקות הנ"ל תואמות, כלומר $\phi_{n+k}(\sigma) = \phi_n(\sigma)$ לכל $k \ge 0$, $n \ge 5$ ולכל $\sigma \in S_n$. מספיק להראות כי $\phi_{n+1}(\sigma) = \phi_n(\sigma)$ לכל $n \ge 5$. נניח בשלילה שההעתקות לא תואמות, ולכן קיימת תמורה $\tau \in S_n$ כך שמתקיים $\phi_{n+1}(\hat{\tau}) \neq \phi_n(\tau)$ (כאשר $\hat{\tau}$ מוגדר לפי ההערה לעיל). לכן קיים $3 \le i \le n+2$ כך ש-$\hat{\tau}(i)+2 \neq \tau(i)+2$ וזו סתירה.

3. השיכון הוא פשוט לפי הכלה.

4. החבורה A_n היא פשוטה עבור $n \ge 5$. הראינו בתרגיל קודם כי איחוד **שרשרת** של חבורות פשוטות הוא חבורה פשוטה, ולכן H היא חבורה פשוטה.
החבורה G אינה פשוטה, כי יש לה תת־חבורה נורמלית לא טריוויאלית, שהיא H. הדרך הקצרה להוכיח זאת הוא לשים לב כי H היא הגרעין של העתקת הסימן $\mathrm{sign} : G \to \{\pm 1\}$. דרך אחרת היא לשים לב כי H מוכלת ממש בתוך G, למשל $(1\,2) \in G$ אבל $(1\,2) \notin H$. כדי להוכיח נורמליות נסתכל על תמורה $\pi \in H$. כלומר קיים m כך ש-$\pi \in A_m$. יהי $\tau \in G$, אזי קיים k כך ש-$\tau \in S_k$. נבחר $l \ge m, k$, למשל $l = \max(m,k)$. נשים לב כי $\mathrm{sign}(\tau\pi\tau^{-1}) = 1$ ולכן $\tau\pi\tau^{-1} \in A_l \subset H$, ולכן $H \lhd G$. קיבלנו כי G ו-H אינן איזומורפיות.

בהצלחה!